# 集合论与图论·定理总结

xyfJASON

# 1　集合代数（第 6 章 ）

重点：文氏图，容斥原理，集合恒等式.

**证明 $A \subseteq B$ 常用方法:**

（一）命题演算法【任取 $x$，$x \in A \Rightarrow \cdots \Rightarrow x \in B$】

（二）包含传递法【找集合 $T$，使得 $A \subseteq T, T \subseteq B$】

（三）利用包含的等价条件【 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$ 】

（四）反证法【假设 $A \nsubseteq B$，则 $\exists x \in A \wedge x \notin B$，推导矛盾】

（五）利用已知包含式并交运算【 $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C, A \cup C \subseteq B \cup C$ 】

**证明 $A = B$ 常用方法:**

（一）命题演算法【任取 $x$，$x \in A \Rightarrow \cdots \Rightarrow x \in B$ 并且 $x \in B \Rightarrow \cdots \Rightarrow x \in A$ 】

（二）等式替换法【利用集合恒等式不断化简】

（三）反证法【假设 $A \neq B$，则 $\exists x(x \in A \wedge x \notin B)$ 或 $\exists x(x \in B \wedge x \notin A)$，推导矛盾】

（四）集合运算法【 $A = B \Rightarrow A \cup C = B \cup C, A \cap C = B \cap C, A - C = B - C$ 】

**定理6.1**：空集是一切集合的子集.

**定理6.2（容斥原理）**：设 $S$ 为有穷集，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是 $n$ 个性质. $S$ 中的任何元素 $x$ 或者具有性质 $P_i$，或者不具有性质 $P_i$，两者必居其一. 令 $A_i$ 表示 $S$ 中具有性质 $P_i$ 的元素构成的子集，则 $S$ 中不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的元素个数为

$$\begin{aligned} \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \\ - \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned}$$

**集合恒等式**:

| 算律 | 集合恒等式 |
|---|---|
| 幂等律 | $A \cup A = A$ |
| | $A \cap A = A$ |
| 结合律 | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| 交换律 | $A \cup B = B \cup A$ |
| | $A \cap B = B \cap A$ |
| 分配律 | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| 同一律 | $A \cup \varnothing = A$ |
| | $A \cap E = A$ |
| 零律 | $A \cup E = E$ |
| | $A \cap \varnothing = \varnothing$ |
| 排中律 | $A \cup \sim A = E$ |
| 矛盾律 | $A \cap \sim A = \varnothing$ |
| 吸收律 | $A \cup (A \cap B) = A$ |
| | $A \cap (A \cup B) = A$ |
| 德摩根律 | $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ |
| | $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ |
| | $\sim (B \cup C) = \sim B \cap \sim C$ |
| | $\sim (B \cap C) = \sim B \cup \sim C$ |
| | $\sim \varnothing = E$ |
| | $\sim E = \varnothing$ |
| 双重否定律 | $\sim\sim A = A$ |
| 其他重要结果 | $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$ |
| | $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$ |
| | $A - B \subseteq A$ |
| | $A - B = A \cap \sim B$ |
| | $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$ |
| | $A \oplus B = B \oplus A$ |
| | $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ |
| | $A \oplus \varnothing = A$ |
| | $A \oplus A = \varnothing$ |
| | $A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$ |

## 2 二元关系（第 7 章）

重点：笛卡尔积，关系图，关系矩阵，关系的运算，关系的性质，闭包，Warshall 算法，等价关系，偏序关系，全序关系，良序关系，哈斯图.

**证明 $R$ 在 $A$ 上自反**：任取 $x$，$x \in A \Rightarrow \cdots \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$.

**证明 $R$ 在 $A$ 上对称**：任取 $\langle x,y\rangle \in R$，$\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \cdots \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R$.

**证明 $R$ 在 $A$ 上反对称**：任取 $\langle x,y\rangle$，$\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R \Rightarrow \cdots \Rightarrow x=y$.

**证明 $R$ 在 $A$ 上传递**：任取 $\langle x,y\rangle, \langle y,z\rangle$，$\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R \Rightarrow \cdots \Rightarrow \langle x,z\rangle \in R$.

**笛卡尔积的性质**：

1. $A \times \varnothing = \varnothing, \varnothing \times A = \varnothing$.
2. 不满足交换律：$A \times B \neq B \times A$（当 $A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing \wedge A \neq B$ 时）
3. 不满足结合律：$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$（当 $A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing \wedge C \neq \varnothing$ 时）
4. 对并和交满足分配律：
$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ (B \cup C) \times A &= (B \times A) \cup (C \times A) \\ A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \\ (B \cap C) \times A &= (B \times A) \cap (C \times A) \end{aligned}$$
5. $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$.

   当 $A, B$ 均为 $\varnothing$ 或均不为 $\varnothing$ 时，逆命题 $A \times B \subseteq C \times D \Rightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq D$ 成立；否则不成立.

**定理 7.1**：设 $F$ 是任意关系，则

1. $(F^{-1})^{-1} = F$.
2. $domF^{-1} = ranF, ranF^{-1} = domF$.

**定理 7.2**：设 $F, G, H$ 为任意关系，则

1. $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$.
2. $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$.

**定理 7.3**：设 $R$ 为 $A$ 上的关系，则 $R \circ I_A = I_A \circ R = R$.

**定理 7.4**：设 $F, G, H$ 为任意关系，则

1. $F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$.

2. $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$.

3. $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$.

4. $(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$.

**定理 7.5**：设 $F$ 为关系，$A, B$ 为集合.

1. $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$.

2. $F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$.

3. $F \upharpoonright (A \cap B) = F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B$.

4. $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$.

**定理 7.6**：设 $A$ 为 $n$ 元集，$R$ 是 $A$ 上的关系，则存在自然数 $s$ 和 $t$，使得 $R^s = R^t$.

**定理 7.7**：设 $R$ 为 $A$ 上的关系，$m, n \in \mathbb{N}$，则

1. $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.【归纳】

2. $(R^m)^n = R^{mn}$.【归纳】

**定理 7.8**：设 $R$ 为 $A$ 上的关系，若存在自然数 $s, t(s < t)$ 使得 $R^s = R^t$，则

1. 对任何 $k \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$.

2. 对任何 $k, i \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $p = t - s$.【归纳】

3. 令 $S = \{R^0, R^1, \cdots, R^{t-1}\}$，则对于任意的 $q \in \mathbb{N}$ 有 $R^q \in S$.【用（2）结论】

**定理 7.9**：设 $R$ 为 $A$ 上的关系，则

1. $R$ 在 $A$ 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$.

2. $R$ 在 $A$ 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$.

3. $R$ 在 $A$ 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$.

4. $R$ 在 $A$ 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

5. $R$ 在 $A$ 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$.

**定理 7.10**：设 $R$ 为 $A$ 上的关系，则有

1. $r(R) = R \cup R^0$.

2. $s(R) = R \cup R^{-1}$.

3. $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$.

**推论**：设 $R$ 为有穷集 $A$ 上的关系，则存在正整数 $r$ 使得 $t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^r$.

**定理 7.11**：设 $R$ 是非空集合 $A$ 上的关系，则

1. $R$ 是自反的当且仅当 $r(R) = R$.

2. $R$ 是对称的当且仅当 $s(R) = R$.

3. $R$ 是传递的当且仅当 $t(R) = R$.

**定理 7.12**：设 $R_1, R_2$ 是非空集合 $A$ 上的关系，且 $R_1 \subseteq R_2$，则

1. $r(R_1) \subseteq r(R_2)$.

2. $s(R_1) \subseteq s(R_2)$.

3. $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

**定理 7.13**：设 $R$ 是非空集合 $A$ 上的关系

1. 若 $R$ 是自反的，则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的.

2. 若 $R$ 是对称的，则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的.

3. 若 $R$ 是传递的，则 $r(R)$ 是传递的.

**定理 7.14**：设 $R$ 为非空集合 $A$ 上的等价关系，则

1. $\forall x \in A$，$[x]$ 是 $A$ 的非空子集.

2. $\forall x, y \in A$，如果 $xRy$，则 $[x] = [y]$.

3. $\forall x, y \in A$，如果 $x \not R y$，则 $[x]$ 与 $[y]$ 不交.

4. $\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$.

**定理**：设$< A, \preccurlyeq >$为偏序集，$B \subseteq A$.

1. 若 $b$ 为 $B$ 的最大（最小）元，则 $b$ 为 $B$ 的极大（极小）元.

2. 若 $B$ 有最大（最小）元，则 $B$ 的最大（最小）元唯一.

3. 若 $B$ 为有限集，则 $B$ 的极大元、极小元恒存在.

**定理（偏序集分解定理）**：设 $< A, \preccurlyeq >$ 为一有限的偏序集，且 $A$ 中最长链的长度为 $n$，则将 $A$ 中元素分成不相交的反链，反链个数至少是 $n$. 即 $A$ 有一划分，使划分有 $n$ 个划分块，且每个划分块为一反链.

**定理**：设 $< A, \preccurlyeq >$ 为一偏序集，$|A| = mn + 1$，那么，$A$ 中或者存在一条长度为 $m + 1$ 的反链，或者存在一条长度为 $n + 1$ 的链.

**定理**：有限集的全序集一定是良序集.

**良序定理**：任意集合均可良序化.

# 3　函数（第 8 章）

重点：满射，单射，双射，恒等函数，自然映射，$B$ 上 $A$，等势，优势，康托定理，有穷集，无穷集，基数，有穷基数，无穷基数，可数集.

**证明映射常用方法:**

1. 证明 $f: A \to B$ 是满射：任取 $y \in B$，找到 $x$（给出 $x$ 的表示）或证明存在 $x \in A$，使得 $f(x) = y$.
2. 证明 $f: A \to B$ 是单射
   (a) 法一：$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_1 = x_2$.
   (b) 法二：$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_1 \neq x_2$.
3. 证明 $f: A \to B$ 不是满射：找到 $y \in B, y \notin ranf$.
4. 证明 $f: A \to B$ 不是单射：找到 $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$，且 $f(x_1) = f(x_2)$.

**重要等势或优势结论:**

| 重要等势或优势结论 |
| --- |
| $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ |
| $\mathbb{R} \approx [a, b] \approx (c, d) \approx \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$ |
| $\{0, 1\}^A \approx \mathcal{P}(A)$ |
| $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ |
| $A \prec \mathcal{P}(A)$ |

**证明集合等势常用方法:**

1. 直接构造双射函数;
2. 构造单射 $f: A \to B$ 和 $g: B \to A$;
3. 利用等势的传递性;
4. 证明 $cardA = cardB$.

**定理 8.1**：设 $F, G$ 是函数，则 $F \circ G$ 也是函数，且满足

1. $dom(F \circ G) = \{x \mid x \in domF \wedge F(x) \in domG\}$.
2. $\forall x \in dom(F \circ G)$ 有 $F \circ G(x) = G(F(x))$.

**推论 1**：设 $F \circ G \circ H$ 是函数，则 $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$.

**推论 2**：设 $f: A \to B, g: B \to C$，则 $f \circ g: A \to C$，且 $\forall x \in A$ 都有 $f \circ g(x) = g(f(x))$.

**定理 8.2**：设 $f: A \to B, g: B \to C$

1. 如果 $f: A \to B, g: B \to C$ 都是满射的，则 $f \circ g: A \to C$ 也是满射的.
2. 如果 $f: A \to B, g: B \to C$ 都是单射的，则 $f \circ g: A \to C$ 也是单射的.
3. 如果 $f: A \to B, g: B \to C$ 都是双射的，则 $f \circ g: A \to C$ 也是双射的.

**定理**：设 $f: A \to B, g: B \to C$

1. 如果 $f \circ g: A \to C$ 是单射的，则 $f: A \to B$ 是单射的.
2. 如果 $f \circ g: A \to C$ 是满射的，则 $g: B \to C$ 是满射的.
3. 如果 $f \circ g: A \to C$ 是双射的，则 $f: A \to B$ 是单射的，$g: B \to C$ 是满射的.

**定理 8.3**：设 $f: A \to B$，则有 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$.

**定理 8.4**：设 $f: A \to B$ 是双射的，则 $f^{-1}: B \to A$ 也是双射的.

**定理 8.5**：设 $f: A \to B$ 是双射的，则 $f^{-1} \circ f = I_B, f \circ f^{-1} = I_A$.

**定理 8.6**：设 $A, B, C$ 是任意集合

1. $A \approx A$.
2. 若 $A \approx B$，则 $B \approx A$.
3. 若 $A \approx B, B \approx C$，则 $A \approx C$.

**定理 8.7（康托定理）**：

1. $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$.
2. 对任意集合 $A$ 都有 $A \not\approx \mathcal{P}(A)$.

# 4　图的基本概念（第 14 章）

> 重点：握手定理，可图化，可简单图化，惠特尼定理，扩大路径法，二部图判定定理，关联矩阵与邻接矩阵的应用.

在以下叙述中，默认图 $G=\langle V,E\rangle$ 有 $n$ 个点、$m$ 条边，平面图有 $r$ 个面，平面图的对偶图有 $n^*$ 个点、$m^*$ 条边和 $r^*$ 个面.

**定理 14.1（握手定理）**：无向图中，$\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)=2m$.【易证】

**定理 14.2（握手定理）**：有向图中，$\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)=2m$ 且 $\sum\limits_{v\in V(G)} d^-(v)=\sum\limits_{v\in V(G)} d^+(v)=m$.【易证】

**推论**：任何图中，奇度顶点的个数是偶数.【由握手定理易证】

**定理 14.3（可图化的充要条件）**：非负整数列 $d(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是可图化的当且仅当 $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数.

【必要性显然，充分性需要构造：奇度顶点两两连一条边，之后不断添环即可.】

**定理 14.4**：无向简单图 $G$ 有 $\Delta(G)\le n-1$.（结合定理 14.3可以得到可简单图化的必要条件）【显然】

**定理 14.5**：若存在从 $u$ 到 $v$ 的通路，则存在从 $u$ 到 $v$ 的长度小于等于 $n-1$ 的通路.【不断删环可证】

**推论**：若存在从 $u$ 到 $v$ 的通路，则存在从 $u$ 到 $v$ 的长度小于等于 $n-1$ 的初级通路（路径）.

**定理 14.6**：若存在从 $v$ 到自身的回路，则存在从 $v$ 到自身的长度小于等于 $n$ 的回路.【不断删边可证】

**推论**：若存在从 $v$ 到自身的回路，则存在从 $v$ 到自身的长度小于等于 $n$ 的初级回路（圈）.

**定理 14.7（惠特尼定理）**：对任意无向图 $G$，有 $\kappa(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$.

【删除边割集中的每条边的一个端点，图一定不连通，故 $\kappa(G)\le\lambda(G)$；删除最小度点的所有边，图一定不连通，故 $\lambda(G)\le\delta(G)$】

**定理 14.8（强连通图判定定理）**：有向图 $D=<V,E>$ 是强连通图当且仅当 $D$ 中存在经过每个顶点至少一次的回路.

【充分性显然，必要性：任两点互相可达，从 $v_1$ 走到 $v_2$，从 $v_2$ 走到 $v_3$，……，走下去即可】

**定理 14.9（单向连通图判定定理）**：有向图 $D=<V,E>$ 是单向连通图当且仅当 $D$ 中存在经过每个顶点至少一次的通路.

【充分性显然，必要性：缩点，找一条极大路径，证明这条极大路径一定通过了所有点】

**扩大路径法**

**定理 14.10（二部图的判定定理）**：无向图 $G$ 是二部图当且仅当 $G$ 中无奇圈.

【必要性易证，充分性构造：任取一个点，与之距离为偶数的在一个集合里，距离为奇数的在另一个集合里，容易证明同一个集合中的点不相邻】

**定理 14.11**：设 $A$ 为有向图 $D$ 的邻接矩阵，则 $A^l$ 中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 是 $v_i$ 到 $v_j$ 长度为 $l$ 的通路数，$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 是 $D$ 中长度为 $l$ 的通路（含回路）总数.【数学归纳法可证】

**推论**：设 $B_l = A + A^2 + \cdots + A^l (l \geq 1)$，则 $B_l$ 中所有元素之和为 $D$ 中长度小于等于 $l$ 的通路总数.

# 5 欧拉图与哈密顿图（第 15 章）

重点：(半)欧拉图判定定理，(半)哈密顿图的一个必要条件和一个充分条件，Fleury 算法，Dijkstra 算法，中国邮递员问题管梅谷的理论.

**定理 15.1（无向欧拉图判定定理）**：无向图 $G$ 是欧拉图当且仅当 $G$ 连通且无奇度顶点.

【必要性：进来一次就出去一次；充分性：对边作归纳，归纳时删去 $G$ 中的一个圈，则各个连通分支均是欧拉图，用这个圈把这些欧拉图连起来，走一条欧拉路即可.】

**定理 15.2（无向半欧拉图判定定理）**：无向图 $G$ 是半欧拉图当且仅当 $G$ 连通且恰有两个奇度顶点.

【必要性：欧拉通路上两个端点奇度，其余顶点进来一次就出去一次；充分性：连接两个奇度顶点，则 $G$ 均是偶度顶点，由定理 15.1，存在欧拉回路，删掉新连的这条边，就形成了欧拉通路.】

**定理 15.3（有向欧拉图判定定理）**：有向图 $D$ 是欧拉图当且仅当 $D$ 强连通且每个顶点出度等于入度.

**定理 15.4（有向半欧拉图判定定理）**：有向图 $D$ 是半欧拉图当且仅当 $D$ 单向连通且恰有两个奇度顶点，其中一个顶点出度比入度大 1，另一个顶点入度比出度大 1，其余顶点入度等于出度.

**定理 15.5（欧拉图判定定理）**：$G$ 是非平凡的欧拉图当且仅当 $G$ 连通且是若干个边不重的圈之并.【归纳】

**中国邮递员问题 管梅谷的结论**：若 $W$ 是图 $G$ 中一条包含所有边的回路，则 $W$ 在这样的回路中具有最短的长度当且仅当满足以下两个条件：

1. 每一条边最多重复经过一次；
2. 在 $G$ 的每一个圈上，重复经过的边的条数不超过圈长的一半.

**定理 15.6（哈密顿图必要条件）**：设无向图 $G =< V, E >$ 是哈密顿图，则对于任意 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \varnothing$，均有 $p(G - V_1) \leq |V_1|$.

【设 $C$ 是一条哈密顿回路，则当 $V_1$ 中的顶点不相邻时 $p(C - V_1)$ 达到最大，为 $|V_1|$，故 $p(G - V_1) \leq p(C - V_1) \leq |V_1|$】

**推论（半哈密顿图必要条件）**：设无向图 $G =< V, E >$ 是半哈密顿图，则对于任意 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \varnothing$，均有 $p(G - V_1) \leq |V_1| + 1$.

**定理 15.7（半哈密顿图充分条件）**：若对于无向简单图 $G$ 中任意两不相邻的顶点 $u, v$，均有 $d(u) + d(v) \geq n - 1$，则 $G$ 中存在哈密顿通路.

【找一条极大路径，若极大路径已经是哈密顿通路了，得证；否则，证明一定存在过极大路径上所有点的圈（此处稍显繁琐），然后把不在极大路径上的点拉进来时破开这条圈，得到一个新的极大路径，重复过程.】

**推论（哈密顿图充分条件）**：若对于无向简单图 $G$ 中任意两不相邻的顶点 $u, v$，均有 $d(u) + d(v) \geq n$，则 $G$ 中存在哈密顿回路.

**定理 15.8**：设 $u, v$ 是 $n$ 阶无向简单图 $G$ 中两个不相邻的顶点，且 $d(u) + d(v) \geq n$，则 $G$ 为哈密顿图当且仅当 $G \cup (u, v)$ 为哈密顿图（$(u, v)$ 是加的新边）.

**定理 15.9**：$n(n \geq 2)$ 阶竞赛图中都有哈密顿通路.【归纳】

# 6 树（第 16 章）

重点：$m = n - 1$，Huffman 算法与 Huffman 编码，(逆)波兰表达式.

**定理 16.1（树的性质）**：下列命题等价：

1. $G$ 是树；
2. $G$ 中任意两个顶点之间存在唯一路径；
3. $G$ 无回路且 $m = n - 1$；
4. $G$ 连通且 $m = n - 1$；
5. $G$ 连通且任何边都是桥；
6. $G$ 中无回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边后所得的图中有唯一的一个含新边的圈.

**定理 16.2**：设 $T$ 是 $n$ 阶非平凡的无向树，则 $T$ 中至少有两片树叶.【握手定理 + $m = n - 1$】

**定理 16.3**：无向图 $G$ 有生成树当且仅当 $G$ 是连通图.

【必要性显然，充分性构造：若 $G$ 含圈，任取一圈随意删一条边，重复过程直至无圈】

**推论**：无向连通图有 $m \geq n - 1$.

**定理 16.4**：设 $T$ 为无向连通图 $G$ 中的一颗生成树，$e$ 为 $T$ 的任意一条弦，则 $T \cup e$ 中含 $G$ 中只含一条弦 $e$，其余边均为树枝的圈，而且不同的弦对应的圈也不同.（由此定义了基本回路）

**定理 16.5**：设 $T$ 为无向连通图 $G$ 中的一颗生成树，$e$ 为 $T$ 的树枝，则 $G$ 中存在只含树枝 $e$，其余边均为弦的割集，且不同的树枝对应的割集也不同.（由此定义了基本割集）

# 7 平面图（第 17 章）

重点：$\sum\limits_{f\in\Phi}\deg(f)=2m$，极大平面图的充要条件，欧拉公式及其推广，连通平面图的必要条件，极大平面图的必要条件，简单平面图的必要条件，Kuratowski 定理，Wangner 定理，块，对偶图.

**定理 17.1**：平面图的子图都是平面图，非平面图的母图都是非平面图.【显然】

**定理 17.2**：设 $G$ 是平面图，则在 $G$ 中加平行边或环后所得的图还是平面图.【显然】

**定理 17.3（重要计数公式）**：平面图所有面的次数之和等于边数的两倍.

【考虑每条边的贡献，每条边都会给总次数贡献 2】

**定理 17.4**：极大平面图是连通的，并且当阶数大于等于 3 时没有割点和桥.

**定理 17.5（极大平面图的充要条件）**：设 $G$ 是 $n(n\geq 3)$ 阶简单连通的平面图，$G$ 为极大平面图当且仅当 $G$ 的每个面的次数均为 3.【充分性、必要性均采用反证法】

**定理 17.6（欧拉公式）**：连通平面图 $G$ 满足 $n+m-r=2$.

【找到 $G$ 的生成树，每添一条边，$n$ 不变，$m$ 和 $r$ 都加 1】

**定理 17.7（欧拉公式推广）**：平面图 $G$ 有 $k$ 个连通分支，则 $n-m+r=k+1$.【有欧拉公式易得】

**定理 17.8（连通平面图的必要条件）**：设连通平面图 $G$ 每个面的次数至少为 $l(l\geq 3)$，则 $G$ 的边数 $m$ 与顶点数 $n$ 有如下关系：$m\leq \frac{l}{l-2}(n-2)$.【由欧拉公式和重要计数公式易得】

**定理 17.9**：设平面图 $G$ 有 $k$ 个连通分支，则 $m\leq \frac{l}{l-2}(n-k-1)$.【由欧拉公式推广和重要计数公式易得】

**定理 17.10（极大平面图的必要条件）**：若 $G$ 是极大平面图，则 $m=3n-6$.

【由欧拉公式和极大平面图的充要条件易得】

**推论（简单平面图的必要条件）**：$m\leq 3n-6$.

【在连通平面图的必要条件中取 $l=3$ 即可，或 $m$ 小于极大平面图的边数】

**定理 17.11**：简单平面图的最小度 $\delta\leq 5$.【由简单平面图的必要条件和握手定理易得】

**定理 17.12（Kuratowski 定理，平面图充要条件1）**：图 $G$ 是平面图当且仅当 $G$ 中既不含与 $K_5$ 同胚的子图，也不含与 $K_{3,3}$ 同胚的子图.

**定理 17.13（Wangner 定理，平面图充要条件2）**：图 $G$ 是平面图当且仅当 $G$ 中既没有可以收缩到 $K_5$ 的子图，也没有可以收缩到 $K_{3,3}$ 的子图.

**定理（平面图充要条件3）**：$G$ 是平面图当且仅当 $G$ 的每个块都是平面图.【归纳】

**定理 17.14**：

1. $n^*=r$；【显然】
2. $m^*=m$；【显然】

3. $r^* = n$；【欧拉公式】

4. $d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i)$.【显然】

**定理 17.15**：设平面图 $G$ 有 $k$ 个连通分支，$G^*$ 是其对偶图.

1. $n^* = r$；【显然】

2. $m^* = m$；【显然】

3. $r^* = n - k + 1$；【欧拉公式推广】

4. $d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i)$.【显然】

# 8 支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色（第 18 章）

重点：$\alpha_0+\beta_0=n$，$\alpha_1+\beta_1=n$，Hall 定理（相异性条件），$t$ 条件，Brooks 定理，Vizing 定理.

**定理 18.1**：无向简单图的极大点独立集都是极小支配集.【反证易证】

**定理 18.2**：无向简单图 $G=<V,E>$,$V^*\subseteq V$，则 $V^*$ 是 $G$ 的点覆盖当且仅当 $\overline{V^*}=V-V^*$ 为 $G$ 的点独立集.【充分性、必要性均用反证法易证】

**推论**：$\alpha_0+\beta_0=n$.

**定理 18.3**：设 $n$ 阶图 $G$ 无孤立点.

1. 设 $M$ 为 $G$ 的一个最大匹配，对 $G$ 中每个 $M-$非饱和点均取一条与其关联的边，组成边集 $N$，则 $W=M\cup N$ 为 $G$ 的最小边覆盖.【直观显然】
2. 设 $W_1$ 为 $G$ 的一个最小边覆盖，若 $W_1$ 中存在相邻的边就移去其中一条，设移去的边集为 $N_1$，则 $M_1=W_1-N_1$ 为 $G$ 的最大匹配.【直观显然】
3. $\alpha_1+\beta_1=n$.【直观显然】

**推论**：设 $M$ 为一个匹配，$W$ 为一个边覆盖，则 $|M|\leq|W|$.【 $|M|\leq\beta_1\leq\alpha_1\leq|W|$ 】

**定理 18.4**：设 $M$ 是图 $G$ 的一个匹配，则 $M$ 为 $G$ 的最大匹配当且仅当 $G$ 中不含关于 $M$ 的可增广交错路径.

【必要性：若含有可增广交错路径，则交换匹配边与非匹配边，匹配数加一，矛盾；充分性：设 $M_1$ 是最大匹配，只需证 $|M|=|M_1|$，设 $H=G[M_1\oplus M]$，讨论 $H$ 为空、含交错圈、含交错路径的情况讨论.】

**定理 18.5（Hall定理，二部图完备匹配充要条件，相异性条件）**：设二部图 $G=<V_1,V_2,E>$，其中 $|V_1|\leq|V_2|$，则 $G$ 中存在 $V_1$ 到 $V_2$ 的完备匹配当且仅当 $\forall S\subseteq V_1, |S|\leq|N(S)|$.【必要性显然，充分性可以归纳证明，也可反证（找交错路径）】

**定理 18.6（$t$ 条件）**：设二部图 $G=<V_1,V_2,E>$ 中 $V_1$ 每个顶点都至少关联 $t$ 条边，$V_2$ 中每个顶点至多关联 $t$ 条边，则 $G$ 中存在 $V_1$ 到 $V_2$ 的完备匹配.【由 Hall 定理易证】

**哥尼定理**：二部图的最大匹配边数等于最小覆盖顶点数.

**定理 18.7**：对任意的无环图 $G$，均有 $\chi(G)\leq\Delta(G)+1$.【归纳，直观显然】

**定理 18.8（Brooks 定理）**：设无环图 $G$ 非完全图非奇圈，则 $\chi(G)\leq\Delta(G)$.

**定理**：对非空简单图 $G$ 有：$\chi(G)\leq\Delta_2(G)+1$.

**定理 18.9**：地图 $G$ 是 $k-$可面着色当且仅当其对偶图 $G^*$ 是 $k-$着色的.【显然】

**定理 18.10（四色定理）**：任何平面图都是 4−可着色的.

**定理 18.11（Vizing 定理）**：简单图的边色数只可能是 $\Delta$ 或 $\Delta+1$.

**定理 18.12（哥尼）**：二部图的边色数为 $\Delta$.

**定理**：若 $G$ 只有一个最大度点或者恰有两个相邻的最大度点，则 $\chi'(G)=\Delta(G)$.

**定理**：若 $n=2k+1$ 且 $m>k\cdot\Delta$，则 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$.【反证】

**定理**：奇阶 $\Delta$ 正则简单图，若 $\Delta>0$，则 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$.【握手定理+上一个定理】

**定理（Vizing）**：无环图 $G$ 中边的最大重数为 $\mu$，则 $\chi'(G)\leq\Delta(G)+\mu$.