数理逻辑题型一览

xyfJASON

---

1 求(主)析取/合取范式
2 用完备联结词组表示公式
3 判断逻辑蕴含/逻辑等价的正确性
4 在 PC 中证明公式
4.1 常用公理&定理
4.2 例题
5 在 ND 中证明公式
5.1 推理规则
5.2 解题思路
5.3 例题
6 在 FC 中证明公式
6.1 概述
6.2 公理与（有用的）定理
6.3 例题
7 构造语义和指派

1 求(主)析取/合取范式

方法 1. 直接转化：

$$
\begin{aligned}
p \to q &\iff \neg p \vee q \\
p \leftrightarrow q &\iff (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)
\end{aligned}
$$

方法 2. 画真值表：如果是求主析取/合取范式推荐这种做法，方便且不容易出错。

例一（2019深圳）：求出公式 $(p \to q) \wedge (p \to r)$ 的主合取范式和主析取范式。

解：

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (p \to r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

主合取范式为：$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

主析取范式为：$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

2 用完备联结词组表示公式

完备联结词组有：$\{\wedge, \vee, \neg\}, \{\Delta_1, \to\}, \{\neg, \to\}, \{\downarrow\}, \{\uparrow\}$ 等。

$$
\begin{aligned}
&\neg p \iff p \downarrow p \iff p \uparrow p \\
&p \vee q \iff \neg p \to q \iff \neg p \uparrow \neg q \iff (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \\
&p \wedge q \iff \neg(p \to \neg q) \iff \neg p \downarrow \neg q \iff (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)
\end{aligned}
$$

例一（2019深圳）：分别用公式$\uparrow$和$\downarrow$表示公式 $p \vee q \to q \wedge r$。

解：

$$
\begin{aligned}
p \vee q \to q \wedge r &\iff \neg(\neg p \wedge \neg q) \to \neg\neg(q \wedge r) \\
&\iff (\neg p \uparrow \neg q) \to \neg(q \uparrow r) \\
&\iff \neg((\neg p \uparrow \neg q) \wedge (q \uparrow r)) \\
&\iff (\neg p \uparrow \neg q) \uparrow (q \uparrow r) \\
&\iff ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow (q \uparrow r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \vee q \to q \wedge r &\iff \neg\neg(p \vee q) \to \neg(\neg q \vee \neg r) \\
&\iff \neg(p \downarrow q) \to (\neg q \downarrow \neg r) \\
&\iff (p \downarrow q) \vee (\neg q \downarrow \neg r) \\
&\iff \neg((p \downarrow q) \downarrow (\neg q \downarrow \neg r)) \\
&\iff ((p \downarrow q) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r))) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r)))
\end{aligned}
$$

例二（2017本部）：用$\downarrow$等价表示公式 $(p \to q) \to \neg r$。

解：

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \to \neg r &\iff \neg(p \to q) \vee \neg r \\
&\iff \neg(\neg(p \to q) \downarrow \neg r) \\
&\iff \neg(\neg(\neg p \vee q) \downarrow \neg r) \\
&\iff \neg((\neg p \downarrow q) \downarrow \neg r) \\
&\iff (((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r)) \downarrow (((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r))
\end{aligned}
$$

3 判断逻辑蕴含/逻辑等价的正确性

使用指派的计算：

$$
\begin{aligned}
&(\neg A)^v = 1 - A^v \\
&(A \wedge B)^v = A^v \cdot B^v \\
&(A \vee B)^v = A^v + B^v - A^v \cdot B^v \\
&(A \to B)^v = 1 - A^v + A^v \cdot B^v \\
&(A \leftrightarrow B)^v = A^v \cdot B^v + (1 - A^v) \cdot (1 - B^v)
\end{aligned}
$$

然后用逻辑蕴含/逻辑等价的定义判断。

如果是错误的，给出一个反例即可。

例一（2019深圳）：判定下列逻辑蕴含式 $\{A \vee B \to C, B \vee C \to D, C \vee D \to E, \neg A\} \implies E \vee B$ 是否成立，给出理由。

解：取指派 v 使得 $A^v = B^v = C^v = D^v = E^v = 0$，则所有条件被弄真但结论被弄假，故不成立。

例二（2017本部）：判定下列逻辑等价式 $\neg((A \to \neg B) \to \neg C) \iff C \to (B \to \neg A)$ 是否成立。

解：

$$
\begin{aligned}
(\neg((A \to \neg B) \to \neg C))^v &= 1 - ((A \to \neg B) \to \neg C)^v \\
&= (A \to \neg B)^v - (A \to \neg B)^v \cdot (\neg C)^v \\
&= (1 - A^v + A^v \cdot (\neg B)^v) \cdot C^v \\
&= (1 - A^v \cdot B^v) \cdot C^v
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(C \to (B \to \neg A))^v &= 1 - C^v + C^v \cdot (B \to \neg A)^v \\
&= 1 - C^v + C^v \cdot (1 - B^v + B^v \cdot (\neg A)^v) \\
&= 1 - B^v \cdot C^v + (1 - A^v) \cdot B^v \cdot C^v \\
&= 1 - A^v \cdot B^v \cdot C^v
\end{aligned}
$$

因而，当 $A^v = B^v = 1, C^v = 0$ 时，前者为 0 而后者为 1，故不成立。

例三（2016本部）：判定下列逻辑蕴含和逻辑等价是否成立。

1. $\neg(C \wedge D) \to (A \to B), A, \neg D \implies B$

   解：设指派 v 弄真所有条件，则 $A^v = 1, D^v = 0, (\neg(C \wedge D) \to (A \to B))^v = 1$，于是：

$$
\begin{aligned}
(\neg(C \wedge D) \to (A \to B))^v &= 1 - (\neg(C \wedge D))^v + (\neg(C \wedge D))^v (A \to B)^v \\
&= C^v D^v + (1 - C^v D^v)(1 - A^v + A^v B^v) \\
&= B^v = 1
\end{aligned}
$$

   所以结论被弄真，故成立。

2. $(A \to C) \wedge (B \to C) \iff \neg(A \to \neg B) \to C$

   解：

$$
\begin{aligned}
((A \to C) \wedge (B \to C))^v &= (A \to C)^v (B \to C)^v \\
&= (1 - A^v + A^v C^v)(1 - B^v + B^v C^v) \\
&= 1 - A^v - B^v + B^v C^v + A^v B^v + A^v C^v - A^v B^v C^v
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\neg(A \to \neg B) \to C)^v &= 1 - (1 - (A \to \neg B)^v) + (1 - (A \to \neg B)^v) \cdot C^v \\
&= (A \to \neg B)^v \cdot (1 - C^v) + C^v \\
&= (1 - A^v + A^v(1 - B^v))(1 - C^v) + C^v \\
&= 1 - A^v B^v + A^v B^v C^v
\end{aligned}
$$

因而，当 $C^v = A^v = 0, B^v = 1$ 时，前者为 0 而后者为 1，故不成立。

4 在 PC 中证明公式

思维过程是证明序列的逆序，即「要证……只需证……」。拿到一道题，只要把思维过程理顺了，证明时倒着写就行了。有时候倒着想卡在某一步了，可以再正向推一下，两面夹击解决问题。

4.1 常用公理&定理

公理 1

$$A1: \quad A \to (B \to A)$$

公理 1 的作用是“砍头”，即「要证 $B \to A$，只需证 A」，直接把前件砍掉了。在前件与后件没有关系，或者发现后件本身就是永真式时使用。

公理 2

$$A2: \quad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

公理 2 有一个鲜明的特点是“共享前件”，即要证的式子中 $A \to B$ 和 $A \to C$ 都有共同的前件 A，这时候我们可以把 A 提出来，变成只需证 $A \to (B \to C)$。如果要证的式子“共享后件”，我们可以对每个部分取逆否得到共享前件的式子，然后运用公理 2。

反身

$$\text{Thm 1}: \quad \vdash A \to A$$

前件互换系列

$$\begin{aligned} \text{Thm 2}: &\quad \text{if} \vdash A \to (B \to C),\ \text{then} \vdash B \to (A \to C) \\ \text{Thm 3}: &\quad \vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C)) \end{aligned}$$

前件互换能调动公式两部分的位置，常常有助于继续推导。见到形如 $A \to (B \to C)$ 时都可以尝试前件互换。

加前后件系列

$$\begin{aligned} \text{Thm 4}: &\quad \vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\ \text{Thm 5}: &\quad \vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)) \end{aligned}$$

观察要证的式子，发现它们的特点也是“共享前件”和“共享后件”，并且与公理 2 不同的是，共享的前件或后件将被砍掉。因此，我们可以总结：当我们遇见一个式子共享前件或共享后件，**首先考虑使用加前后件**，看一看砍掉前后件之后得到的式子是不是永真式，如果是，那么皆大欢喜；如果不是，那么使用公理 2。

自相矛盾系列

$$\begin{aligned} &\text{Thm 6}: && \vdash \neg A \to (A \to B) \\ &\text{Thm 7}: && \vdash A \to (\neg A \to B) \end{aligned}$$

如果 A 和 $\neg A$ 都成立，这是自相矛盾的，所以能推出任何式子都成立。

反证法系列

$$\begin{aligned} &\text{Thm 9}: && \vdash (\neg A \to A) \to A \\ &\text{Thm 11}: && \vdash (A \to \neg A) \to \neg A \\ &\text{Thm 16}: && \vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A) \\ &\text{Thm 17}: && \vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) \end{aligned}$$

如果 A 不成立，那么 A 成立，这说明假设不正确，故 A 成立；

如果 A 成立，那么 A 不成立，这说明假设不正确，故 $\neg A$ 成立；

如果 A 不成立，立即可知 B 成立；推了一会儿又知道 B 不成立，说明假设不正确，故 A 成立；

如果 A 成立，立即可知 B 成立；推了一会儿又知道 B 不成立，说明假设不正确，故 $\neg A$ 成立。

逆否命题系列

$$\begin{aligned} &A3: && \vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A) \\ &\text{Thm 13}: && \vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A) \\ &\text{Thm 14}: && \vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A) \\ &\text{Thm 15}: && \vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A) \end{aligned}$$

逆否命题很有用，有时遇到很多否定自然使用逆否命题把否定去掉，有时用一下逆否命题就能产生和其他项重复的项，方便我们的证明。

双重否定系列

$$\begin{aligned} &\text{Thm 10}: && \vdash \neg\neg A \to A \\ &\text{Thm 12}: && \vdash A \to \neg\neg A \end{aligned}$$

三段论

$$\text{Thm 8}: \quad \text{if } \vdash A \to B, \vdash B \to C, \text{ then } \vdash A \to C$$

非常常用的定理。

解题神器

$$\text{Thm 18}: \ \vdash \neg A \to C \ \wedge \ \vdash B \to C \ \text{ iff } \ \vdash (A \to B) \to C$$

要证 $(A \to B) \to C$，只需要拆开分别证 $\neg A \to C$ 和 $B \to C$ 即可。

4.2 例题

例一（2019深圳）

求证：$\vdash_{PC} ((A \to B) \to A) \to (B \to A)$

思维过程：

$$((A \to B) \to A) \to (B \to A)$$

$$\Uparrow$$

$$B \to (A \to B) \quad \checkmark$$

例二（2019深圳）

求证：$\vdash_{PC} ((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$

思维过程：

$$((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$$

$$\Uparrow$$

$$((A \to B) \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C))$$

$$\Uparrow$$

$$B \to (A \to B) \quad \checkmark$$

例三（2019深圳）

求证：$\vdash_{PC} (A \to C) \to ((B \to C) \to (((A \to B) \to B) \to C))$

思维过程：

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (((A \to B) \to B) \to C))$$

$$\Uparrow$$

$$(\neg C \to \neg A) \to ((\neg C \to \neg B) \to (\neg C \to \neg((A \to B) \to B)))$$

$$\Uparrow$$

$$\neg C \to (\neg A \to (\neg B \to \neg((A \to B) \to B)))$$

$$\Uparrow$$

$$\neg A \to (((A \to B) \to B) \to B)$$

$$\Uparrow$$

$$((A \to B) \to B) \to (\neg A \to B)$$

$$\Uparrow$$

$$\neg A \to (A \to B) \quad \checkmark$$

例四（2019深圳）

求证：$\vdash_{PC} ((A \to B) \to C) \to ((A \to C) \to C)$

思维过程：

$$
\begin{gathered}
((A \to B) \to C) \to ((A \to C) \to C) \\
\Uparrow \\
(\neg C \to \neg (A \to B)) \to (\neg C \to \neg (A \to C)) \\
\Uparrow \\
\neg C \to (\neg (A \to B) \to \neg (A \to C)) \\
\Uparrow \\
\neg C \to ((A \to C) \to (A \to B)) \\
\Uparrow \\
\neg C \to (A \to (C \to B)) \\
\Uparrow \\
A \to (\neg C \to (C \to B)) \\
\Uparrow \\
\neg C \to (C \to B) \quad \checkmark
\end{gathered}
$$

例五（2017本部）

求证：$\vdash_{PC} ((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$

同 2019 深圳，此处不赘述。

例六（2017本部）

求证：$\vdash_{PC} B \to ((B \to C) \to (\neg A \to C))$

思维过程：

$$
\begin{gathered}
B \to ((B \to C) \to (\neg A \to C)) \\
\Uparrow \\
B \to (\neg A \to ((B \to C) \to C)) \\
\Uparrow \\
\neg A \to (B \to ((B \to C) \to C)) \\
\Uparrow \\
(B \to C) \to (B \to C) \quad \checkmark
\end{gathered}
$$

例七（2017本部）

求证：$\vdash_{PC} (A \to B) \to (\neg B \to (A \to \neg A))$

思维过程：

$$(A \to B) \to (\neg B \to (A \to \neg A))$$
$$\Uparrow$$
$$(\neg B \to \neg A) \to (\neg B \to (A \to \neg A))$$
$$\Uparrow$$
$$\neg A \to (A \to \neg A) \ \checkmark$$

例八（2017本部）

求证：$\neg((A \to B) \to \neg(B \to A)), A \vdash_{PC} B$

思维过程：

$$\neg((A \to B) \to \neg(B \to A)),\ A \vdash B$$
$$\Uparrow$$
$$\neg((A \to B) \to \neg(B \to A)) \to (A \to B)$$
$$\Uparrow$$
$$\neg(A \to B) \to ((A \to B) \to \neg(B \to A)) \ \checkmark$$

例九（2016本部）

求证：$\vdash_{PC} \neg(A \to B) \to (A \to (B \to C))$

思维过程：

$$\neg(A \to B) \to (A \to (B \to C))$$
$$\Uparrow$$
$$A \to (\neg(A \to B) \to (B \to C))$$
$$\Uparrow$$
$$\neg(A \to B) \to (B \to C)$$
$$\Uparrow$$
$$\neg(A \to B) \to \neg B \to (B \to C)$$

例十（2016本部）

求证：$\vdash_{PC} ((A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg C)) \to (\neg B \to C)$

思维过程：

$$((A\to\neg B)\to\neg(A\to\neg C))\to(\neg B\to C)$$

$$\Nearrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Nwarrow$$

$$\neg(A\to\neg B)\to(\neg B\to C) \qquad\qquad \neg(A\to\neg C)\to(\neg B\to C)$$

$$\Uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$\underline{\neg(A\to\neg B)\to B}\to(\neg B\to C) \qquad\qquad \underline{\neg(A\to\neg C)\to C}\to(\neg B\to C)$$

例十一（2016本部）

求证：$\vdash_{PC} (C\to\neg(A\to B))\to((C\to\neg A)\to\neg C)$

思维过程：

$$(C\to\neg(A\to B))\to((C\to\neg A)\to\neg C)$$

$$\Nearrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Nwarrow$$

$$\neg C\to((C\to\neg A)\to\neg C)\ \checkmark \qquad \neg(A\to B)\to((C\to\neg A)\to\neg C)$$

$$\Uparrow$$

$$(C\to\neg A)\to(\neg(A\to B)\to\neg C)$$

$$\Uparrow$$

$$(C\to\neg A)\to(C\to(A\to B))$$

$$\Uparrow$$

$$\neg A\to(A\to B)\ \checkmark$$

例十二（2016本部）

求证：$\vdash_{PC} ((\neg A\to A)\to\neg B)\to((\neg A\to\neg B)\to\neg B)$

思维过程：

$$((\neg A\to A)\to\neg B)\to((\neg A\to\neg B)\to\neg B)$$

$$\Uparrow$$

$$(B\to\neg(\neg A\to A))\to(B\to\neg(\neg A\to\neg B))$$

$$\Uparrow$$

$$B\to(\neg(\neg A\to A)\to\neg(\neg A\to\neg B))$$

$$\Uparrow$$

$$B\to((\neg A\to\neg B)\to(\neg A\to A))$$

$$\Uparrow$$

$$B\to(\neg A\to(\neg B\to A))$$

$$\Uparrow$$

$$\neg A\to(B\to(\neg B\to A))$$

$$\Uparrow$$

$$B\to(\neg B\to A)\ \checkmark$$

例十三（2015本部）

求证：$\vdash_{PC} \neg C \to (\neg B \to \neg(\neg B \to C))$

思维过程：

$$
\begin{array}{c}
\neg C \to (\neg B \to \neg(\neg B \to C)) \\
\Uparrow \\
\neg B \to (\neg C \to \neg(\neg B \to C)) \\
\Uparrow \\
\neg B \to ((\neg B \to C) \to C) \\
\Uparrow \\
(\neg B \to C) \to (\neg B \to C) \ \checkmark
\end{array}
$$

例十四（2015本部）

求证：$\vdash_{PC} ((A \to (B \to C)) \to A) \to A$

思维过程：

$$
\begin{array}{ccc}
 & ((A \to (B \to C)) \to A) \to A & \\
\Nearrow & & \Nwarrow \\
\neg(A \to (B \to C)) \to A & & A \to A \ \checkmark \\
\Uparrow & & \\
\neg A \to (A \to (B \to C)) \ \checkmark & &
\end{array}
$$

例十五（2015本部）

求证：$\vdash_{PC} (A \to (B \to \neg C)) \to (C \to (A \to \neg B))$

思维过程：

$$(A\to(B\to\neg C))\to(C\to(A\to\neg B))$$

$$\Uparrow$$

$$(A\to(C\to\neg B))\to(C\to(A\to\neg B))$$

$$\Uparrow$$

$$C\to((A\to(C\to\neg B))\to(A\to\neg B))$$

$$\Uparrow$$

$$C\to(A\to((C\to\neg B)\to\neg B))$$

$$\Uparrow$$

$$A\to(C\to((C\to\neg B)\to\neg B))$$

$$\Uparrow$$

$$(C\to\neg B)\to(C\to\neg B)\ \checkmark$$

例十六（2015本部）

求证：$((\neg A \to B) \to C) \to D, \neg D \to \neg B, \neg A \vdash_{PC} D$

思维过程：

$$((\neg A\to B)\to C)\to D,\ \neg D\to\neg B,\ \neg A\vdash D$$

$$\Uparrow$$

$$((\neg A\to B)\to C)\to D,\ B\to D\vdash\neg A\to D$$

$$\Uparrow$$

$$(((\neg A\to B)\to C)\to D)\to((B\to D)\to(\neg A\to D))$$

$$\Uparrow$$

$$(((\neg A\to B)\to C)\to D)\to(\neg(\neg B\to A)\to D)$$

$$\Uparrow$$

$$\neg(\neg B\to A)\to((\neg A\to B)\to C)$$

$$\Uparrow$$

$$\neg(\neg A\to B)\to((\neg A\to B)\to C)\ \checkmark$$

5 在 ND 中证明公式

相比 PC 系统，ND 系统的推理规则比较符合人的思维，可能相对好做一点。

5.1 推理规则

$$
\begin{array}{lll}
r_1: & \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \cup \{A\} \vdash B} & (+) \\
r_2: & \dfrac{\Gamma; A \vdash B, \Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B} & (-) \\
r_3: & \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} & (\vee +) \\
r_4: & \dfrac{\Gamma; A \vdash C, \Gamma; B \vdash C, \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C} & (\vee -) \\
r_5: & \dfrac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} & (\wedge +) \\
r_6: & \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}, \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} & (\wedge -) \\
r_7: & \dfrac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} & (\to +) \\
r_8: & \dfrac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B} & (\to -) \\
r_9: & \dfrac{\Gamma; A \vdash B, \Gamma; A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} & (\neg +) \\
r_{10}: & \dfrac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B} & (\neg -)
\end{array}
$$

$\neg\neg$ 和 $\leftrightarrow$ 略去不表。

5.2 解题思路

逆推的终点：一般是 $(\in)$ 或 $(\to -)$ 或 $(\neg -)$

反证法：源自 $(\neg +)$。要证 $\Gamma \vdash \neg A$，只需把 $\neg A$ 取反放到 $\vdash$ 前面去，然后找矛盾，即只需证 $\Gamma; A \vdash B$ 并且 $\Gamma; A \vdash \neg B$；同理，要证 $\Gamma \vdash A$，只需证 $\Gamma; \neg A \vdash B$ 并且 $\Gamma; \neg A \vdash \neg B$。

分类讨论1：源自 $(\vee -)$。当 $\vee$ 出现在 $\vdash$ 前时，就把 $\vee$ 的两边拆开放进条件里分别推导（即分类讨论），然后用 $(\vee -)$ 规则。

分类讨论2：源自 $(-)$，目的是添上对立的条件之后能推出相同的结论。典型用法有两个：

1. 证明 $\Gamma \vdash A \vee B$ 时，我们这样分类讨论：「当 C 成立时 A 成立，当 C 不成立时 B 成立，所以不管怎么说，$A \vee B$ 都成立」。具体地说，我们只需要证明 $\Gamma; C \vdash A$ 以及 $\Gamma; \neg C \vdash B$，然后使用 $(-)$ 规则即可得到 $\Gamma \vdash A \vee B$.

2. 证明 $A \to B \vdash B$ 时，我们这样分类讨论：「当 A 成立时 B 成立，当 A 不成立时我们可以从 $\neg A$ 推出 B，那么不管怎么说 B 都成立」。具体地说，我们只需要证明 $A \to B, A \vdash B$ 以及 $A \to B, \neg A \vdash B$，然后使用 $(-)$ 规则即可得到 $A \to B \vdash B$.

$\to$ **前移**：当 $\to$ 出现在 $\vdash$ 之后时，必然使用 $(\to +)$ 规则，即：「要证 $\Gamma \vdash A \to B$，只需证 $\Gamma; A \vdash B$」。

$\to$ **后放**：当 $\to$ 出现在 $\vdash$ 之前时，纵观所有 ND 中的推理规则，并没有处理 $\to$ 在 $\vdash$ 前的情况，因而我们只能一直把它保留在 $\vdash$ 前面。一种处理方法是前文的分类讨论，另一种处理方法是：

2. 使用 $(\in)$ 规则让 $\to$ 在 $\vdash$ 后面出现；

3. 想办法用上 $(\to -)$ 规则。

拆开 $\wedge$： 而当 $\wedge$ 出现在 $\vdash$ 之前时，和 $\to$ 的情况一样，我们只能一直把它保留在 $\vdash$ 前面。要让它发挥作用，也采用类似的方法：

2. 使用 $(\in)$ 规则让 $\wedge$ 在 $\vdash$ 后面出现；

3. 使用 $(\wedge -)$ 规则。

事实上容易发现，条件中含有 $A \wedge B$ 和条件中含有 A, B 并没有本质区别，完全可以无视 $\wedge$。

逐个击破：当 $\vdash$ 后面要演绎的内容是两个公式相 $\wedge$ 时，就用 $(\wedge +)$ 规则把题目一分为二分别证明。

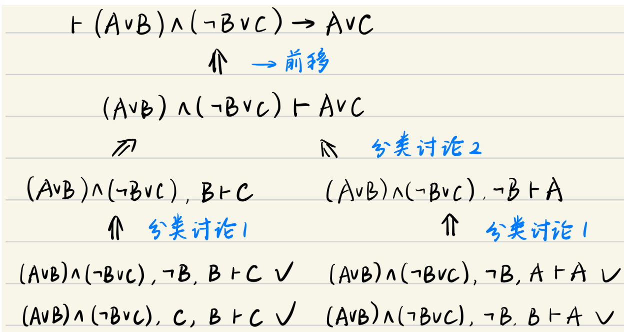
丢条件：如果一个条件没用，就用 $(+)$ 规则把它直接丢掉。

5.3 例题

例一（2019深圳）

求证：$\vdash_{ND} (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \to A \vee C$

思维过程：



例二（2019深圳）

求证：$\vdash_{ND} (\neg A \to B) \to A \vee B$

思维过程：

$$\vdash (\neg A \to B) \to A \vee B$$

$$\Uparrow \quad \to \text{前移}$$

$$\neg A \to B \vdash A \vee B$$

$$\Nearrow \qquad \Nwarrow \quad \text{分类讨论2}$$

$$\neg A \to B,\ A \vdash A \ \checkmark \qquad \neg A \to B,\ \neg A \vdash B \ \checkmark$$

例三（2017本部）

求证：$\vdash_{ND} ((A \to B) \to C) \to (B \to C)$

思维过程：

$$\vdash_{ND} ((A \to B) \to C) \to (B \to C)$$

$$\Uparrow \quad \to \text{前移}$$

$$(A \to B) \to C,\ B \vdash C$$

$$\Uparrow \quad \to \text{后放}$$

$$(A \to B) \to C,\ B \vdash A \to B$$

$$\Uparrow \quad \to \text{前移}$$

$$(A \to B) \to C,\ B,\ A \vdash B \ \checkmark$$

例四（2017本部）

求证：$\vdash_{ND} (B \to \neg C) \to (\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to C)))$

思维过程：

$$\vdash (B \to \neg C) \to (\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to C)))$$

$$\Uparrow \quad \to \text{前移}$$

$$B \to \neg C,\ \neg A,\ B \vdash \neg(\neg A \to C)$$

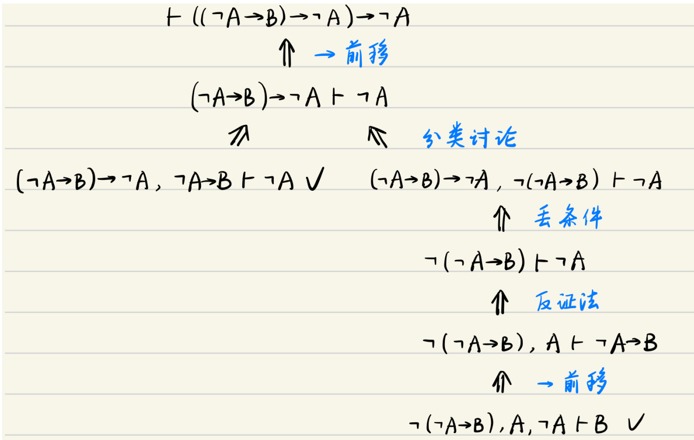
$$\Uparrow \quad \text{反证法}$$

$$B \to \neg C,\ \neg A,\ B,\ \neg A \to C \vdash \text{矛盾} \begin{cases} C \ \checkmark \\ \neg C \ \checkmark \end{cases}$$

例五（2016本部）

求证：$\vdash_{ND} ((\neg A \to B) \to \neg A) \to \neg A$

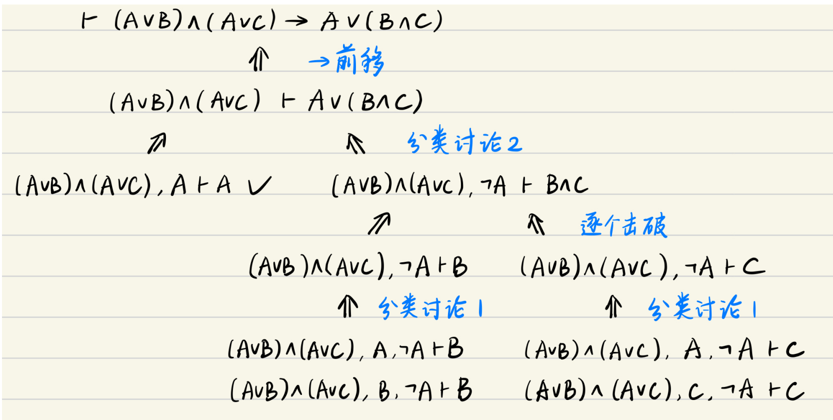
思维过程：



例六（2016本部）

求证：$\vdash_{ND} (A \vee B) \wedge (A \vee C) \to A \vee (B \wedge C)$

思维过程：



例七（2015本部）

求证：$\vdash_{ND} (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \to (\neg A \vee C)$

和 2019 深圳的题目本质一样，此处不赘述。

例八（2015本部）

求证：$\vdash_{ND} (\neg A \to \neg(A \to \neg B)) \to A$

思维过程：

$$\vdash (\neg A \to \neg(A \to \neg B)) \to A$$

$\Uparrow$ →前移

$$\neg A \to \neg(A \to \neg B) \vdash A$$

$\Uparrow$ 反证法

$\neg A \to \neg(A \to \neg B), \neg A \vdash$ 矛盾 $\begin{cases} \neg(A \to \neg B) \ \checkmark \\ A \to \neg B \end{cases}$

$\Uparrow$ 丢条件

$$\neg A \vdash A \to \neg B$$

$\Uparrow$ →前移

$\neg A, A \vdash \neg B$ $\checkmark$

6 在 FC 中证明公式

6.1 概述

FC 系统本质是 PC 系统的扩展：在 PC 系统中，我们考虑的最小单元是原子公式 $p, q, r, \cdots$，然后用联结词 $\to, \neg$ 把它们组合起来得到公式。但是在 FC 系统中，原子公式被进一步细化为 $P^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$，其中 $P^{(n)}$ 是 n 元谓词符号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项；项又被细化为常元、变元和函词的组合；用联结词 $\to, \neg, \forall$ 把原子公式组合起来的到公式。因此，FC 系统确实比 PC 系统复杂了许多。

不过，正因如此，PC 系统中的所有定理在 FC 中自然成立，我们只需进一步研究 FC 中新引入的东西。又由于谓词、函词、常元是在给定实际背景后人为**解释**的，所以我们研究 FC 中的定理时，**就是在和** $\forall(\exists)$ **打交道**（其中 $\exists vA$ 定义为 $\neg\forall v\neg A$）。

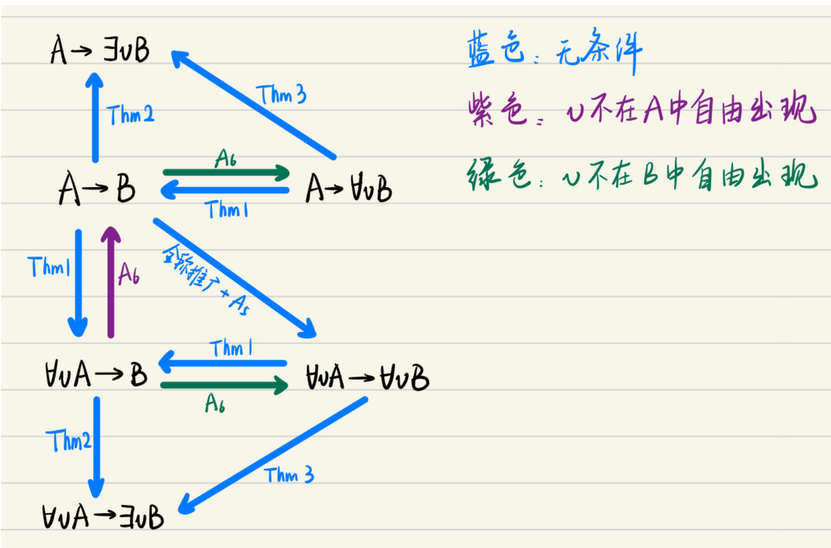
和 PC 与 ND 中的证明一样的，我们着重思维过程，证明过程倒着写即可。

另外，允许在证明 FC 的过程中用 ND 的推理规则。

6.2 公理与（有用的）定理

$$
\begin{array}{ll}
A_1: & A \to (B \to A) \\
A_2: & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
A_3: & (\neg A \to \neg B) \to (B \to A) \\
A_4: & \forall vA \to A_t^v \\
A_5: & \forall v(A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB) \\
A_6: & A \to \forall vA \quad (v \text{ 在 } A \text{ 中无自由出现}) \\
\text{Thm } 1: & \vdash \forall vA \to A \\
\text{Thm } 2: & \vdash A \to \exists vA \\
\text{Thm } 3: & \vdash \forall vA \to \exists vA \\
\text{Thm } 4: & \text{if} \quad \vdash A, \quad \text{then} \quad \vdash \forall vA \\
\text{Thm } 5: & \text{if} \quad \Gamma \vdash A, \quad \text{then} \quad \Gamma \vdash \forall vA \quad (v \text{ 在 } \Gamma \text{ 中无自由出现}) \\
\text{Thm } 10: & \text{if} \quad \Gamma \vdash \exists vA \quad \text{and} \quad \Gamma; A \vdash B, \quad \text{then} \quad \Gamma \vdash B \quad (v \text{ 在 } \Gamma \text{ 和 } B \text{ 中无自由出现})
\end{array}
$$

关于 $A_5 \sim$ Thm 5，可以概括为下图：



关于 Thm 10，其可以视为 ND 中析取消除规则的推广：考虑 $(\vee-)$ 规则，

$$\frac{\Gamma; A \vdash C, \Gamma; B \vdash C, \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}$$

意识到 $\exists vA$ 的**本质就是一系列的或**：$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$，故而我们可以推广得到：

$$\frac{\Gamma; A \vdash B, \Gamma \vdash \exists vA}{\Gamma \vdash B}$$

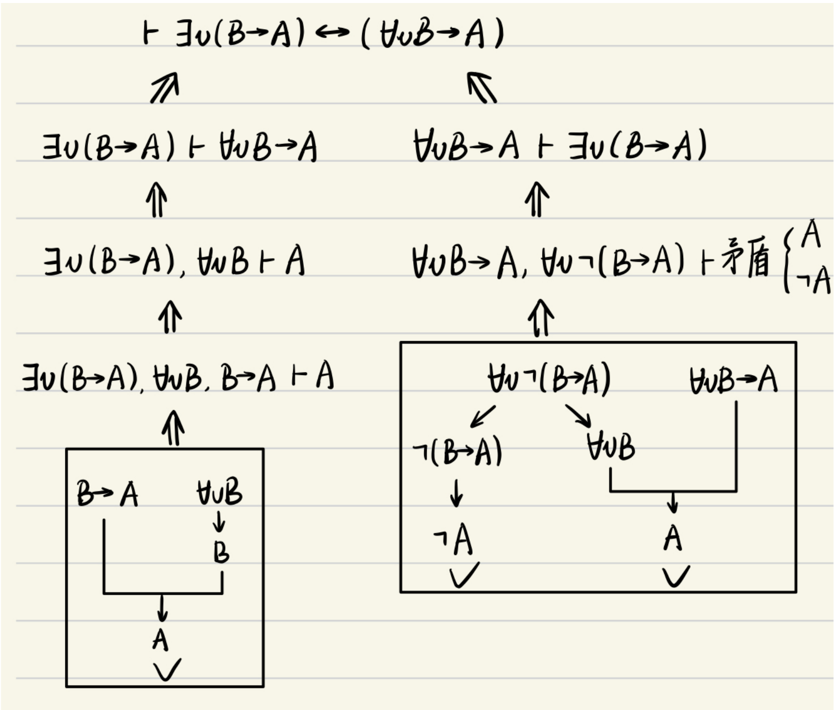
与 $(\vee-)$ 规则的作用类似，存在消除定理的用法是：当 $\exists$ 出现在 $\vdash$ 前时，即需要证明 $\Gamma; \exists A \vdash B$ 时，只需要证明 $\Gamma; \exists A, A \vdash B$ 即可。但是千万千万要注意 v 不能在 Γ（假设集）和 B（结论） 里面自由出现！

6.3 例题

例一（2019深圳）

求证：$\vdash_{FC} \exists v(B \to A) \leftrightarrow (\forall vB \to A)$，其中 v 在 A 中无自由出现。

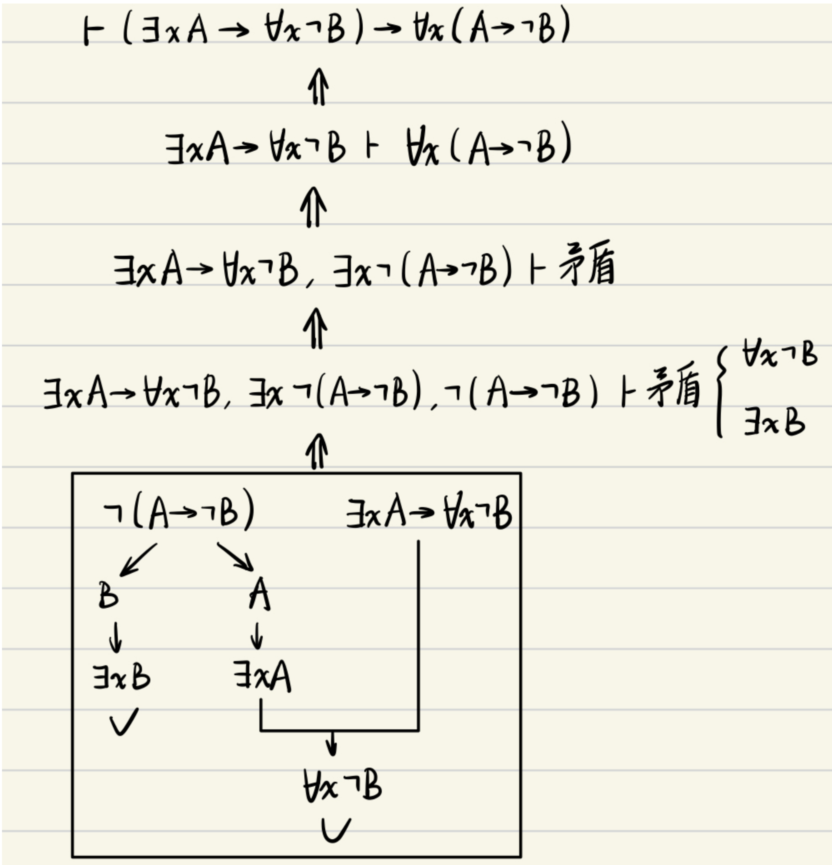
思维过程：



例二（2017本部）

求证：$\vdash_{FC} (\exists xA \to \forall x\neg B) \to \forall x(A \to \neg B)$

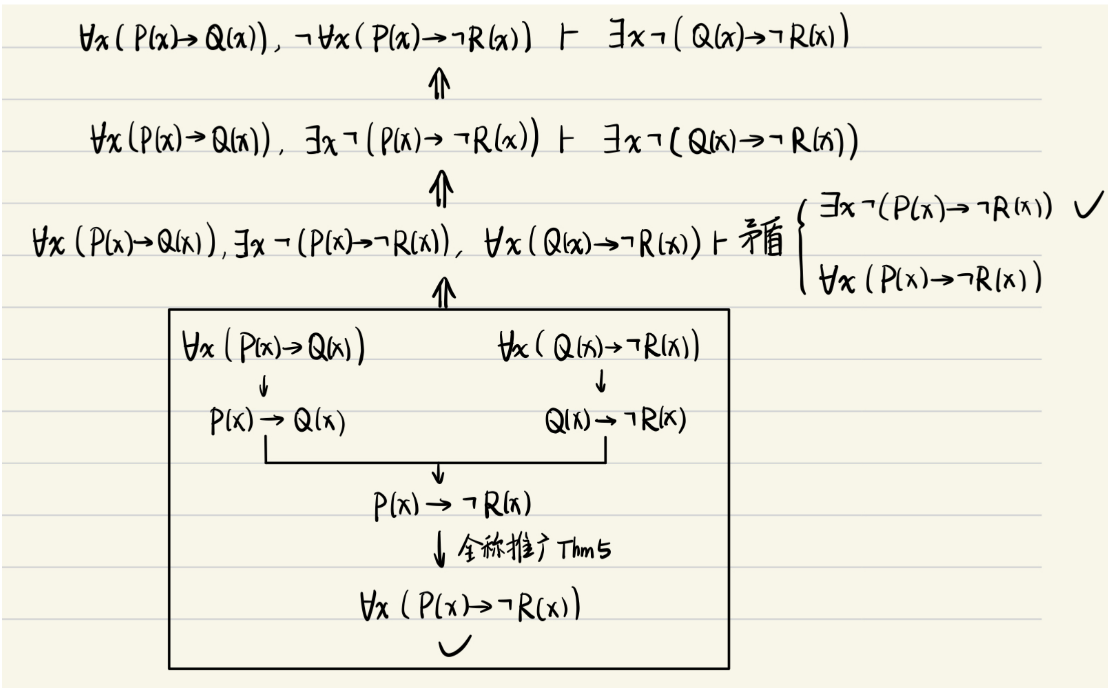
思维过程：



例三（2017本部）

求证：$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to \neg R(x)) \vdash_{FC} \exists x\neg(Q(x) \to \neg R(x))$

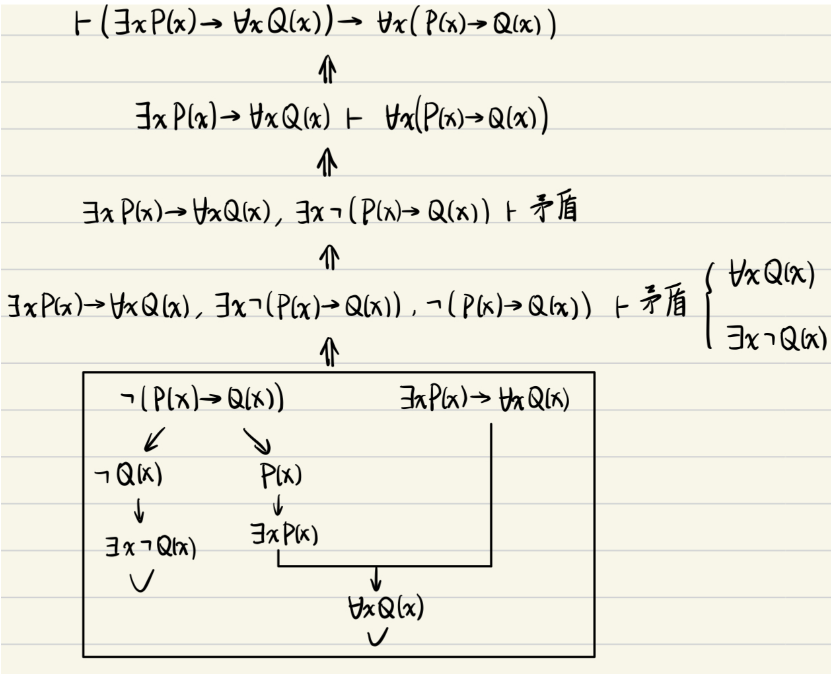
思维过程：



例四（2015本部）

求证：$\vdash_{FC} (\exists x P(x) \to \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$

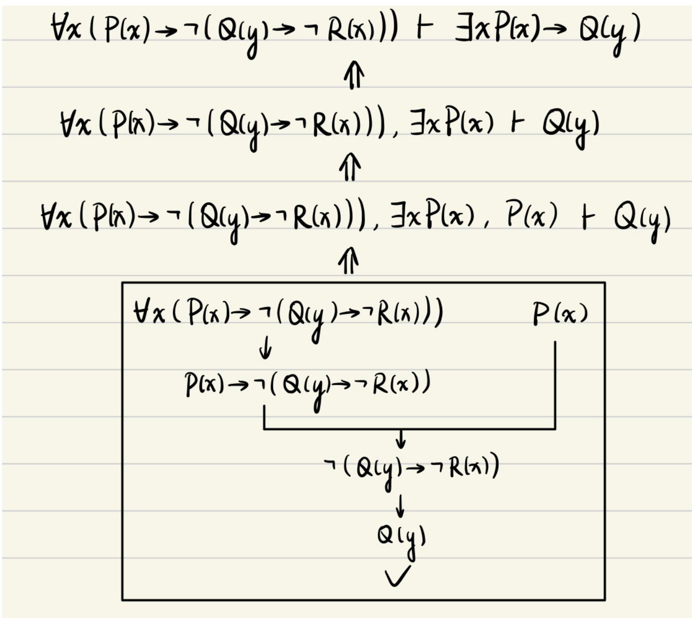
思维过程：



例五（2015本部）

求证：$\forall x(P(x) \to \neg(Q(y) \to \neg R(x))) \vdash_{FC} \exists x P(x) \to Q(y)$

思维过程：



7 构造语义和指派

语义是一个结构，包括论域（个体域）U 和解释 $I: L_a \cup L_f \cup L_p \to U \cup U_f \cup U_p$；指派是一个映射 $s: L_v \to U$。

$\vDash_U A[s]$ 表示公式 A 在结构 U 和指派 s 下取值为真，其定义是：

1. 当 A 为原子公式（谓词）$P^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$ 时，

$$\vDash_U A[s] \quad \text{iff} \quad \langle \bar{s}(t_1), \cdots, \bar{s}(t_n)\rangle \in \overline{P^{(n)}}$$

2. 当 A 为公式 $\neg B$ 时

$$\vDash_U A[s] \quad \text{iff} \quad \nvDash_U B[s]$$

3. 当 A 为公式 $B \to C$ 时，

$$\vDash_U A[s] \quad \text{iff} \quad \nvDash_U B[s] \text{ or } \vDash_U C[s]$$

4. 当 A 为公式 $\forall vB$ 时，

$$\vDash_U A[s] \quad \text{iff} \quad \text{对每一个 } d \in U, \vDash_U B[s(v \mid d)]$$

其中，$s(v \mid d)$定义为：$s(v \mid d)(u) = \begin{cases} s(u) & u \neq v \\ d & u = v \end{cases}$

扩展到联结词 $\vee, \wedge$ 和量词 $\exists$ 时，进一步定义：

$$\begin{aligned} \vDash_U B \vee C[s] \quad &\text{iff} \quad \vDash_u B[s] \text{ or } \vDash_U C[s] \\ \vDash_U B \wedge C[s] \quad &\text{iff} \quad \vDash_u B[s] \text{ and } \vDash_U C[s] \\ \vDash_U \exists vB[s] \quad &\text{iff} \quad \text{存在 } d \in U, \vDash_u B[s(v \mid d)] \end{aligned}$$

例一（2019深圳）：找出语义和指派使得 $P(x, f(x,a)) \to Q(x)$ 为真。

解：构造结构 U，其论域为 $\mathcal{D} = \{0,1\}$，解释为 $\bar{a} = 0, \bar{P} = \{(0,0)\}, \bar{Q} = \{1\}$，
$\bar{f}(0,0) = 1,\ \bar{f}(0,1) = 1,\ \bar{f}(1,0) = 1,\ \bar{f}(1,1) = 1$；构造指派 $s: s(x) = \bar{x} = 1$。

于是 $\overline{f(x,a)} = \bar{f}(1,0) = 1$，由于 $(1,1) \notin \bar{P}$，故$\nvDash_U P(x, f(x,a))[s]$，故 $\vDash_U P(x, f(x,a)) \to Q(x)[s]$。

例二（2017本部）：举例说明 $A \to B \vdash_{FC} \forall vA \to \forall vB$ 不一定成立。

思路：这其实考察的是对全称推广定理 5 的理解（也可以看作考察对公理 6 的理解），如果 v 不在假设集 $A \to B$ 中自由出现，那么这句话是成立的，可以通过全称推广定理 5 加上公理 5 进行证明。现在要求举例不成立，所以一定要让 v 在 $A \to B$ 中自由出现。

解：根据演绎定理，只需要说明$\vdash_{FC} (A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB)$ 不一定成立。因此只需要找到一个结构 U 和指派 s，使得$\vDash_U (A \to B)[s]$ 并且$\nvDash_U (\forall vA \to \forall vB)[s]$，也即 $\vDash_U \forall vA[s]$ 且$\nvDash_U \forall vB[s]$。

以 $A = P(v), B = Q(v)$ 为例，构造结构 U，其论域为 $\mathcal{D} = \{0,1\}$，解释为 $\bar{P} = \{0,1\}, \bar{Q} = \{0\}$；构造指派 $s: s(v) = \bar{v} = 0$。

于是一方面，由于 $0 \in \bar{Q}$，所以 $\vDash_U Q(v)[s]$，即 $\vDash_U B[s]$，故而 $\vDash_U (A \to B)[s]$。

另一方面，由于 $0, 1 \in \bar{P}$，所以 $\vDash_U P(v)[s(v \mid 0)]$ 并且 $\vDash_U P(v)[s(v \mid 1)]$，因此 $\vDash_U \forall v P(v)[s]$，即 $\vDash_U \forall v A[s]$；

又由于 $1 \notin \bar{Q}$，所以 $\nvDash_U Q(v)[s(v \mid 1)]$，因此 $\nvDash_U \forall v Q(v)[s]$，即 $\nvDash_U \forall v B[s]$。

综上，我们有 $\vDash_U (A \to B)[s]$ 且 $\vDash_U \forall v A[s]$ 且 $\nvDash_U \forall v B[s]$，于是根据开头的分析，$A \to B \vdash_{FC} \forall v A \to \forall v B$ 不一定成立。

例三（2016本部）：能否构造解释和指派使得公式 $A \to \forall v A$ 为假？请举例说明。

解：以公式 A 为 $P(v)$ 为例，构造结构 U，其论域为 $\mathcal{D} = \{0, 1\}$，解释为 $\bar{P} = \{0\}$；构造指派 $s : s(v) = \bar{v} = 0$。

则一方面由于 $0 \in \bar{P}$，故 $\vDash_U P(v)[s]$，即 $\vDash_U A[s]$；另一方面，由于 $1 \notin \bar{P}$，故 $\nvDash_U P(v)[s(v \mid 1)]$，于是 $\nvDash_U \forall v A[s]$。

综合两方面，$\nvDash_U A \to \forall v A[s]$。

例四（2015本部）：构造解释使得下列谓词公式为真：$\forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \land Q(x, y)))$。

解：构造结构 U，其论域为 $\mathcal{D} = \{0, 1\}$，解释为 $\bar{P} = \{0\}$, $\bar{Q} = \{(0, 0), (1, 0)\}$。

要使得 $\vDash_U \forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \land Q(x, y)))$，只需要对于 $x = 0$ 和 $x = 1$ 都有：$\vDash_U \exists y(P(y) \land Q(x, y))$。

由于 $0 \in \bar{P}$，$(0, 0) \in \bar{Q}$，$(1, 0) \in \bar{Q}$，故无论 x 是 0 或 1，只要取 $y = 0$，就有 $\vDash_U P(y) \land Q(x, y)$，从而 $\vDash_U \exists y(P(y) \land Q(x, y))$。