信息论

xyfJASON

1 信息的统计度量

1.1 自信息量和条件自信息量

Def（自信息量）：设 x 为一个随机事件，

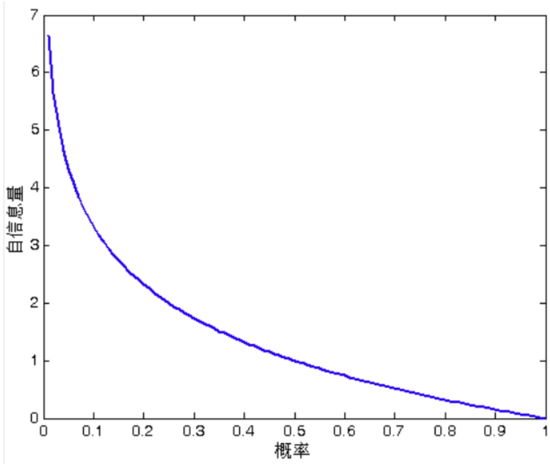
$$I(x) = -\log p(x)$$

自信息量衡量随机事件的不确定性。

Def（联合自信息量）：设 x, y 为随机事件，

$$I(x, y) = -\log p(x, y)$$

单位：若 log 底数为 2，为 bit；若底数为 e，为 nat；若底数为 10，为 hart；若底数为 3，为 trit.



Properties:

1. 单调递减
2. 当 $p(x) = 1$ 时，$I(x) = 0$
3. 当 $p(x) = 0$ 时，$I(x) = \infty$
4. 两独立事件的联合信息量等于各自信息量之和：$I(x, y) = I(x) + I(y) \quad x, y$ 独立

Def（条件自信息量）：设 x, y 为随机事件，

$$I(x \mid y) = -\log p(x \mid y)$$

1.2 互信息量和条件互信息量

Def（互信息量）：设 x, y 为随机事件，

$$I(x; y) = \log \frac{p(x \mid y)}{p(x)} = I(x) - I(x \mid y)$$

互信息量是一种消除的不确定性的度量，即先验不确定性减去尚存在的不确定性。

Property（互易性）：

$$I(x;y)=\log\frac{p(x\mid y)}{p(x)}=\log\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}=\log\frac{p(y\mid x)}{p(y)}=I(y;x)$$

Property：当 x,y 独立时，互信息量为 0.

Property：互信息量可正可负，无论符号如何，绝对值越大，x 和 y 关系越密切。

Thm:

$$I(x;y)\le I(x),\qquad I(x;y)\le I(y)$$

proof:

$$I(x;y)=\log\frac{p(x\mid y)}{p(x)}<\log\frac{1}{p(x)}=I(x)$$

Q.E.D.

Def（条件互信息量）：设 x,y,z 是随机事件，

$$I(x;y\mid z)=\log\frac{p(x\mid y,z)}{p(x\mid z)}$$

Def（多个事件之间的互信息）：

$$I(x;y,z)=\log\frac{p(x\mid y,z)}{p(x)}=\log\frac{p(x\mid y,z)}{p(x\mid z)}\frac{p(x\mid z)}{p(x)}=I(x;z)+I(x;y\mid z)$$

1.3 熵，条件熵和联合熵

Def（熵）：设有离散随机变量 X，

$$H(X)=\mathbb{E}[I(X)]=\mathbb{E}[-\log p(X)]=-\sum_x p(x)\log p(x)$$

注意，定义 $0\log 0=\lim_{x\to 0}x\log x=0$.

Def（条件熵）：设 X,Y 为两随机变量，

$$H(X\mid Y)=\sum_{x,y}p(x,y)I(x\mid y)=-\sum_{x,y}p(x,y)\log p(x\mid y)$$

又由于

$$H(X\mid y)=-\sum_x p(x\mid y)\log p(x\mid y)$$

故

$$\begin{aligned}H(X\mid Y)&=-\sum_y\sum_x p(x,y)\log p(x\mid y)\\&=-\sum_y p(y)\sum_x p(x\mid y)\log p(x\mid y)\\&=\sum_y p(y)H(X\mid y)\end{aligned}$$

注意区分 $H(X \mid Y)$ 和 $H(X \mid y)$.

Def（联合熵）：设 X, Y 为两随机变量，

$$H(X,Y) = \sum_{x,y} p(x,y) I(x,y) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log p(x,y)$$

Property（对称性）：

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = H(p_2, p_1, \ldots, p_n) = \cdots$$

Property（非负性）：

$$H(X) \geq 0$$

当且仅当 X 为必然事件/确定性随机变量时 $H(X) = 0$.

Property（扩展性）：

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = H(p_1, p_2, \ldots, p_n - \epsilon, \epsilon)$$

其中 ϵ 是一个无穷小量。

Property（可加性）：

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y \mid X) = H(Y) + H(X \mid Y)$$

特别地，当 X, Y 独立时，$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$.

proof:

$$\begin{aligned}
H(X,Y) &= \sum_{xy} p(x,y) \log \frac{1}{p(x,y)} \\
&= \sum_{xy} p(x,y) \log \frac{1}{p(x)p(y \mid x)} \\
&= \sum_{xy} p(x,y) \log \frac{1}{p(x)} + \sum_{xy} p(x,y) \log \frac{1}{p(y \mid x)} \\
&= \sum_{x} \log \frac{1}{p(x)} \sum_{y} p(x,y) + H(Y \mid X) \\
&= \sum_{x} p(x) \log \frac{1}{p(x)} + H(Y \mid X) \\
&= H(X) + H(Y \mid X)
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Property（极值性）：

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leq H(1/n, 1/n, \ldots, 1/n) = \log n$$

Property（确定性）：必然事件熵为 0.

Property（上凸性）：$H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ 是严格上凸函数。

Thm：

$$H(X \mid Y) \leq H(X)$$

proof:

$$
\begin{aligned}
H(X \mid Y) &= \sum_{xy} p(x,y) \log \frac{1}{p(x \mid y)} \\
&= \sum_{xy} p(x,y) \log \frac{p(x)p(y)}{p(x,y)p(x)} \\
&= \sum_{xy} p(x,y) \log \frac{1}{p(x)} + \sum_{xy} p(x,y) \log \frac{p(x)p(y)}{p(x,y)} \\
&= H(X) + \log \left(\sum_{xy} p(x,y) \frac{p(x)p(y)}{p(x,y)} \right) \\
&= H(X)
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

Thm：

$$H(X,Y) \le H(X) + H(Y)$$

利用可加性与上一条定理易得。

Def（加权熵）：

$$H_W(X) = -\sum_{i=1}^{n} w_i p_i \log p_i$$

1.4　平均互信息量

Def（平均互信息量）：设 X, Y 是两随机变量，

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= \sum_{x,y} p(x,y) I(x;y) \\
&= \sum_{x,y} p(x) p(y \mid x) \log \frac{p(y \mid x)}{p(y)} \\
&= \sum_{x,y} p(x) p(y \mid x) \log \frac{p(y \mid x)}{\sum_{x'} p(y \mid x') p(x')}
\end{aligned}
$$

写成这种形式是为了只用 $p(x)$ 和 $p(y \mid x)$ 表达平均互信息量，其中 $p(x)$ 是先验概率，$p(y \mid x)$ 是前向转移概率。

Property（非负性）：

$$I(X;Y) \ge 0$$

当 X, Y 独立时为零。

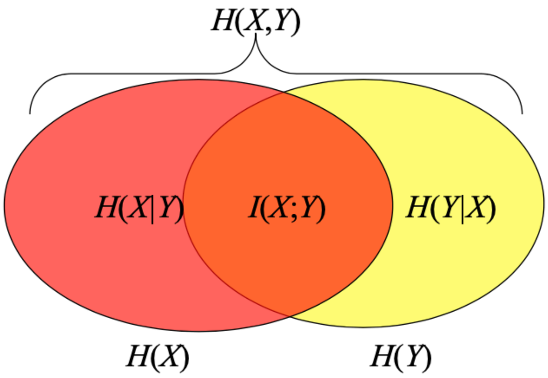
Property（对称性）：

$$I(X;Y) = I(Y;X)$$

平均互信息量和各类熵的关系：

$$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

源自互信息量和自信息量的关系，如下图所示。



Property（极值性）：

$$I(X;Y) \le H(X) \quad I(X;Y) \le H(Y)$$

Property（凸函数性）：平均互信息量是先验概率 $p(x)$ 的上凸函数；平均互信息量是前向转移概率 $p(y \mid x)$ 的下凸函数。

2 离散信源

2.1 信源的数学模型及其分类

信源可以输出多个符号，每个符号以一定概率随机出现，因此可用如下表述形式建模：

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_q) \end{bmatrix}$$

连续信源 v.s. 离散信源：

- 连续信源——时空连续、幅度连续（如自然图像）
- 离散信源——时空离散、幅度离散（如数字图像）
- 采样（时空离散化）与量化（幅度取值离散化）

有记忆信源 v.s. 无记忆信源：

- 有记忆信源
  - 有限记忆信源——记忆长度
  - 无限记忆信源
- 无记忆信源：$p(x_1 \cdots x_M) = \prod_{i=1}^{M} p(x_i)$

2.2 离散无记忆信源

Def：设信源 X 的符号集为 $\{x_1, \ldots, x_q\}$，符号 x_i 发出的概率为 $p(x_i)$，它们**互不相关**，称 X 为离散无记忆信源。

自信息量：信源发出符号 x_i 的信息量

$$I(x_i) = -\log p(x_i)$$

信源熵：信源的平均自信息量

$$H(X) = \mathbb{E}[I(x_i)] = \sum_{i=1}^{q} p(x_i) I(x_i) = -\sum_{i=1}^{q} p(x_i) \log p(x_i)$$

2.3 离散无记忆信源的扩展信源

N **次扩展信源**：集合中的每一个元素是一个 N 维随机矢量，例如：

- 二进制信源：$X = \{00, 01, 10, 11\}$，$N = 2$
- 英语：$X = \{\text{the}, \text{car}, \text{ear}, \text{she}, \text{you}, \ldots\}$，$N = 3$
- 汉语：$X = \{\text{我们在上课，张三睡着了，}\ldots\}$，$N = 5$

Def：设 X 是一个离散无记忆信源

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_q) \end{bmatrix}$$

则 X 的 N 次扩展信源为：

$$\begin{bmatrix} X^N \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{q^N} \\ p(\alpha_1) & p(\alpha_2) & \cdots & p(\alpha_{q^N}) \end{bmatrix}$$

其中，若 $\alpha_i = x_{i_1} \cdots x_{i_N}$，则 $p(\alpha_i) = \prod_{k=1}^{N} p(x_{i_k})$.

离散无记忆 N 次扩展信源的熵：离散无记忆信源 X 的 N 次扩展信源 X^N 的熵等于信源熵的 N 倍，即：

$$H(X^N) = NH(X)$$

2.4 离散平稳信源

2.4.1 离散平稳信源

Def：设信源产生随机序列：$X_1, X_2, \ldots$，满足：

1. $X_i \in \{a_1, \ldots, a_q\}$
2. 序列是平稳的：

$$P(X_{i_1} = x_1, \ldots, X_{i_N} = x_N) = P(X_{i_1+h} = x_1, \ldots, X_{i_N+h} = x_N)$$

称此信源为离散平稳信源。离散平稳信源所发符号序列的概率分布**与时间起点无关**，概率是平稳的。

Def：

- 一维平稳信源：

$$P(X_i = x) = P(X_j = x) = p(x)$$

- 二维平稳信源：

$$P(X_i = x_1, X_{i+1} = x_2) = P(X_j = x_1, X_{j+1} = x_2) = p(x_1 x_2)$$

- 完全平稳信源：

$$P(X_i = x_1, \ldots, X_{i+N} = x_N) = P(X_j = x_1, \ldots, X_{j+N} = x_N) = p(x_1, \ldots, x_N)$$

Thm：从定义容易推得，离散平稳信源的条件概率也与时间起点无关：

$$P(x_{i+N} \mid x_i \cdots x_{i+N-1}) = P(x_{j+N} \mid x_j \cdots x_{j+N-1})$$

注意，离散平稳信源不一定无记忆。

2.4.2 二维平稳信源的熵

二维平稳信源 X:

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1X_2 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & \cdots & a_qa_q \\ p(a_1a_1) & p(a_1a_2) & \cdots & p(a_qa_q) \end{bmatrix}$$

联合熵:

$$H(X) = H(X_1X_2) = -\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} p(a_ia_j)\log p(a_ia_j)$$

条件熵:

$$H(X_2 \mid X_1) = -\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} p(a_ia_j)\log p(a_j \mid a_i)$$

2.4.3 极限熵

Def: 信源输出长度为 N 的符号序列，平均每个符号的熵为:

$$H_N(X) = \frac{1}{N}H(X^N) = \frac{1}{N}H(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

其中，X^N 是 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ 的简写。

Def（极限熵）:

$$H_\infty(X) = \lim_{N\to\infty} H_N(X)$$

含义: 信源输出的符号序列中，平均每个符号带有的信息量，即实际的熵。

Thm: 对任意离散平稳信源，若 $H_1(X) < \infty$，则:

$$\lim_{N\to\infty} H_N(X) = \lim_{N\to\infty} H(X_N \mid X^{N-1})$$

特别地，当信源记忆长度有限时（设为 m），则:

$$H_\infty(X) = \lim_{N\to\infty} H(X_N \mid X_1, X_2, \ldots, X_{N-1}) = H(X_{m+1} \mid X_1, \ldots, X_m)$$

2.5 马尔可夫信源

2.5.1 有限状态马尔可夫链

Def: 设有随机序列 $\{X_n\}$，状态空间 $S = \{S_1, \ldots, S_q\}$，若:

$$P(X_n = S_{i_n} \mid X_{n-1} = S_{i_{n-1}}, \ldots, X_1 = S_{i_1}) = P(X_n = S_{i_n} \mid X_{n-1} = S_{i_{n-1}})$$

则称 $\{X_n\}$ 具有马尔可夫性质，是马尔可夫链。

Def（转移概率）: 已知 m 时刻系统处于状态 S_i 的条件下，在 n 时刻系统处于状态 S_j 的概率

$$p_{ij}(m,n) = P(X_n = S_j \mid X_m = S_i)$$

- 一步转移概率：$p_{ij}(m, m+1)$，简记为 $p_{ij}(m)$.
- k 步转移概率：$p_{ij}(m, m+k)$，也记作 $p_{ij}^{(k)}(m)$；所有 $p_{ij}^{(k)}(m)$ 构成转移矩阵 $P^{(k)}(m)$.

Def（时齐马尔可夫链，齐次马尔可夫链，具有平稳转移概率的马尔可夫链）：

$$p_{ij}(m) = P(X_{m+1} = j \mid X_m = i) = p_{ij}$$

即 $p_{ij}(m)$ 与时刻 m 无关。

易知时齐马尔可夫链满足 C-K 方程：

$$P^{(m+r)} = P^{(m)}P^{(r)}$$

Def（遍历性）：若齐次马尔可夫链对一切 i, j 存在不依赖于 i 的极限：

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = w_j$$

且满足：

$$w_j \geq 0, \quad w_j = \sum_i w_i p_{ij}, \quad \sum_j w_j = 1$$

则称其具有遍历性，w_j 为稳态分布。

注意，遍历性是指经过一个过程后达到平稳，而不是一直平稳。

稳态分布：设某马尔可夫链的状态转移矩阵为 P，其稳态分布为 $\vec{w}$（列向量），则：

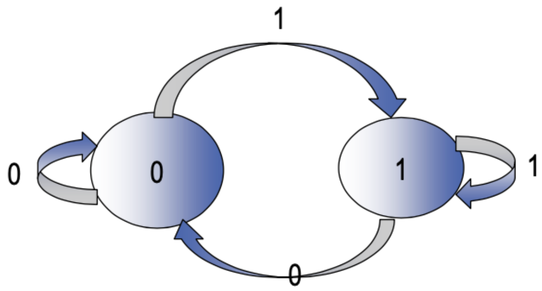
1. $\sum_j w_j = 1$
2. $\vec{w}^T P = \vec{w}^T$；进而，若初始分布 $\vec{w}^{(0)} = \vec{w}$，则对所有 n，$\vec{w}^{(n)} = \vec{w}$
3. $\vec{w}$ 是该链的唯一稳态分布。

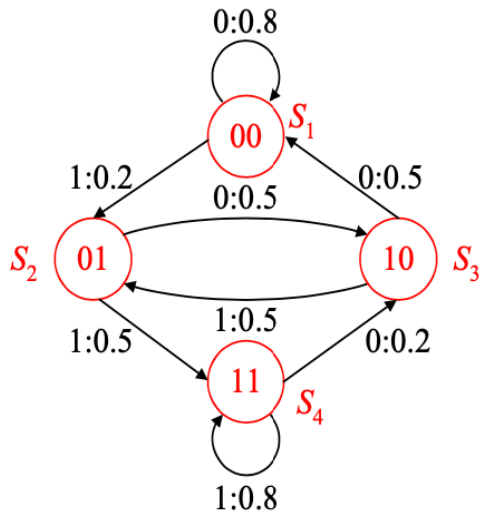
Thm：设 P 为某一马尔可夫链的状态转移矩阵，则该链稳态分布存在的充要条件是存在一个正整数 N，使得矩阵 P^N 中所有的元素均大于零。

2.5.2 马尔可夫信源

马尔可夫信源的状态<u>由若干个符号组成</u>：

- 一阶马尔可夫信源：每个状态包含一个符号，将要输出的符号仅与前一个符号（即上一个状态）相关
- 二阶马尔可夫信源：每个状态包含两个符号，将要输出的符号与前两个符号（即上一个状态）相关
- ……





马尔可夫信源是有限记忆信源，若状态由 m 个符号组成，则记忆长度为 m.

遍历的马尔可夫信源的极限熵：时间足够长后，遍历的 m 阶马尔可夫信源可视作平稳信源：

$$H_\infty = \lim_{N\to\infty} H(X_N \mid X_1, X_2, \ldots, X_{N-1}) = H(X_{m+1}|X_1, X_2, \ldots, X_m)$$

即 m 阶遍历马尔可夫信源的极限熵 = m 阶条件熵。

下面继续进行计算：

$$\begin{aligned}
H_\infty &= H(X_{m+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_m) \\
&= \sum_{a_{k_{m+1}}} \sum_{a_{k_m}, \ldots, a_{k_1}} p(a_{k_{m+1}} a_{k_m} \cdots a_{k_1}) \log \frac{1}{p(a_{k_{m+1}} \mid a_{k_m}, \ldots, a_{k_1})} \\
&= \sum_{a_{k_{m+1}}} \sum_{S_j} p(a_{k_{m+1}} S_j) \log \frac{1}{p(a_{k_{m+1}} \mid S_j)} \\
&= \sum_{S_j} p(S_j) \sum_{a_{k_{m+1}}} p(a_{k_{m+1}} \mid S_j) \log \frac{1}{p(a_{k_{m+1}} \mid S_j)} \\
&= \sum_{S_j} p(S_j) H(X \mid S_j)
\end{aligned}$$

因此，欲计算某遍历的马尔可夫信源的极限熵（信源熵），只需计算其稳态分布 $p(S_j)$，和在每一个状态 S_j 下发出的符号的熵 $H(X \mid S_j)$.

2.6 相关性和剩余度

对于平稳信源，有：

$$H(X_N \mid X_1, \ldots, X_{N-1}) \le H(X_N \mid X_2, \ldots, X_{N-1}) = H(X_{N-1} \mid X_1, \ldots, X_{N-2})$$

以此类推：

$$H(X_N \mid X_1, \ldots, X_{N-1}) \le H(X_{N-1} \mid X_1, \ldots, X_{N-2}) \le \cdots \le H(X_1) \le H_0 = \log q$$

含义：由于信源符号间存在依赖关系，信源输出的符号越多，越容易判断将要输出的符号是什么，即信源熵（不确定性）越小。

Def（熵的相对率）：

$$\eta = \frac{H(X)}{H_{\max}(X)} = \frac{H(X)}{H_0(X)}$$

Def（信源剩余度）：

$$R = 1 - \frac{H_\infty}{H_0} = 1 - \frac{H_\infty}{\log q}$$

其中，H_0 表示每个符号可能携带的最大的平均信息量，H_∞ 表示每个符号携带的实际的平均信息量。

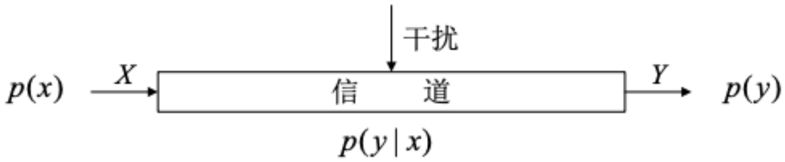
Def（内熵）：

$$R_{ie} = \log q - H_\infty(X)$$

含义：信源剩余度越大，表明信源符号之间的相关性越强，信源的输出效率越低；信源剩余度越小，表明信源符号之间的相关性越弱，信源输出效率越高。

3 离散信道及其容量

3.1 信道的数学模型及其分类



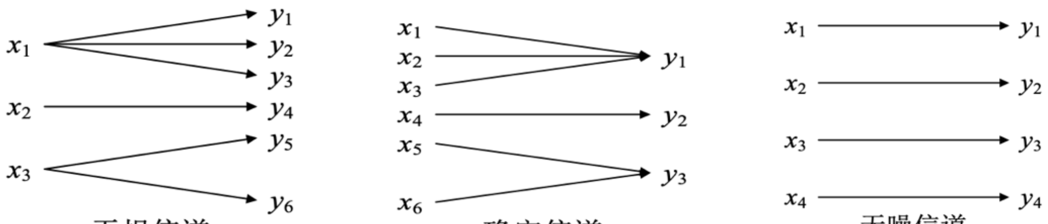
由于干扰的存在，信道的输出 Y 与输入 X 不一定完全相同，用条件概率 $p(y|x)$ 描述。

信道的分类:

- 根据输入输出是否连续:
  - 连续信道：I、O 均是连续事件集
  - 离散信道；I、O 均是离散事件集
- 根据输入输出个数:
  - 两端信道；I、O 均只有一个用户的单向通信信道，又称为两用户信道、单路信道
  - 多端信道：I 或 O 至少有一端有两个以上的用户，又称为多用户信道、网络信道
- 根据编码器、译码器的数量:
  - 多元接入信道：多个编码器、一个译码器的信道
  - 广播信道：一个编码器、多个译码器的信道
- 根据统计特性是否随时间变化
  - 恒参信道：信道的统计特性不随时间发生变化
  - 随参信道：信道的统计特性随时间发生变化
- 根据信道的记忆特性:
  - 无记忆信道：信道的输出仅与当前的输入有关，与以前的输入无关
  - 有记忆信道：信道的输出不仅与当前的输入有关，与以前的输入也有关系

一些特殊信道:

- 无损信道：输出可以决定输入，$H(X \mid Y) = 0$
- 确定信道：输出完全由输入决定，$H(Y \mid X) = 0$
- 无噪信道：即使无损信道，又是确定信道
- 无用信道：输入输出相互独立

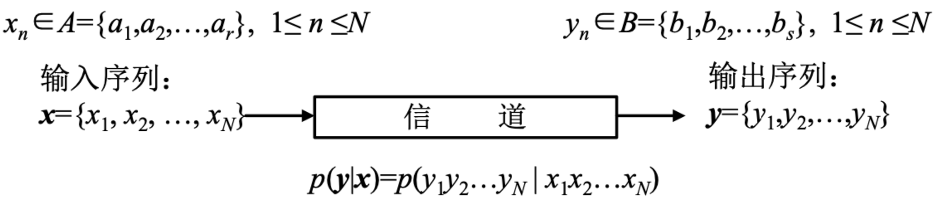


无损信道　确定信道　无噪信道

3.2 离散无记忆信道

3.2.1 离散信道的数学模型

信道输入序列 $x=\{x_1,\ldots,x_N\}$，输出序列 $y=\{y_1,\ldots,y_N\}$，信道：$p(y\mid x)=p(y_1\cdots y_N\mid x_1\cdots x_N)$. 其数学模型为：



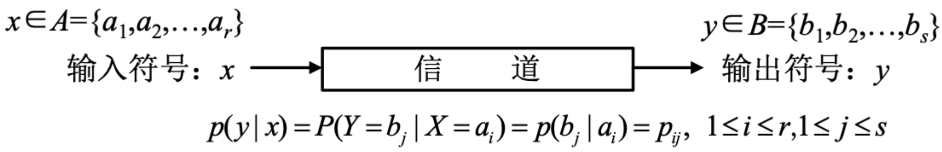
简记为：

$$\{X,p(y\mid x),Y\}$$

Def：若离散信道对任意 N 长的输入、输出序列有

$$p(y\mid x)=p(y_1y_2\cdots y_N\mid x_1x_2\cdots x_N)=\prod_{n=1}^{N}p(y_n\mid x_n)$$

则称它为**离散无记忆信道**，简称 DMC. 其数学模型为：



简记为：

$$\{X,p(y\mid x),Y\}=\{X,p(y_n\mid x_n),Y\}$$

注：对于一般的离散信道，

$$p(y\mid x)=p(y_1\mid x_1\cdots x_N)p(y_2\mid x_1\cdots x_Ny_1)\cdots p(y_N\mid x_1\cdots x_Ny_1\cdots y_{N-1})$$

Def：对任意 n 和 m，若离散无记忆信道还满足 $P(y_n=j\mid x_n=i)=P(y_m=j\mid x_m=i)$， 则称此信道为**平稳**的或者**恒参**的。

后面如无特殊声明，所讨论的离散无记忆信道都是平稳的。

3.2.2 DMC 的信道矩阵

平稳 DMC 的概率不变且只需研究单个符号的传输，因此可以组成一个**信道矩阵**：

$$P = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{r \times s}$$

> 注意 P 不是一个方阵。

分析离散信道常用的概率列举如下：

- 先验概率：

$$p(a_i) = p(X = a_i)$$

- 联合概率：

$$p(a_i b_j) = p(a_i)p(b_j \mid a_i) = p(b_j)p(a_i \mid b_j)$$

- 前向转移概率（信道传递概率）：

$$p(b_j \mid a_i) = p_{ij}$$

- 后向转移概率（后验概率）：

$$p(a_i \mid b_j) = \frac{p(a_i)p(b_j \mid a_i)}{\sum_k p(a_k)p(b_j \mid a_k)}$$

- 输出符号概率：

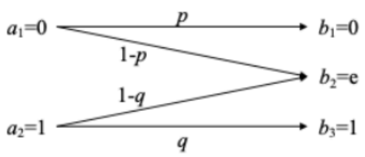
$$p(b_j) = \sum_i p(a_i)p(b_j \mid a_i)$$

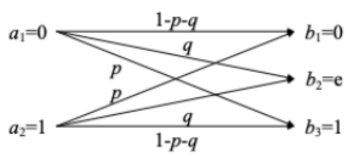
Def（对称信道）：信道转移矩阵 $p(b_j \mid a_i)$ 的行是彼此的置换，列也是彼此的置换

Def（弱对称信道）：信道转移矩阵 $p(b_j \mid a_i)$ 的行是彼此的置换，列和相等

例如：$p(y \mid x) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{bmatrix}$ 是弱对称信道。

二元删除信道 & 二元对称消失信道：





信道矩阵：

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & 1-q & q \end{bmatrix}$$

信道矩阵：

$$P = \begin{bmatrix} 1-p-q & q & p \\ p & q & 1-p-q \end{bmatrix}$$

3.2.3 信道疑义度

Def（先验熵）：

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{r} p(a_i)\log p(a_i)$$

Def（后验熵）：

$$H(X \mid b_j) = -\sum_{i=1}^{r} p(a_i \mid b_j)\log p(a_i \mid b_j)$$

Def（信道疑义度）：即输入空间 X 对输出空间 Y 的条件熵，是后验熵的期望。

$$H(X \mid Y) = -\sum_{i}\sum_{j} p(a_i b_j)\log p(a_i \mid b_j) = \mathbb{E}[H(X \mid b_j)]$$

什么情况下信道疑义度为零？无噪信道或无损信道：$H(X \mid Y) = 0$.

$H(X \mid Y) \le H(X)$：收到输出符号 Y 以后，总能消除一些对 X 的不确定性，获得一些信息。

3.2.4 平均互信息

Def：原始信源熵与信道疑义度之差

$$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y)$$

含义：通过信道传送过去的信息量。

凸函数性：

- 固定信道：信道传递概率 $p(y \mid x)$ 不变，平均互信息 $I(X;Y)$ 是信源概率分布 $p(x)$ 的上凸函数。
- 固定信源：信源概率分布 $p(x)$ 不变，平均互信息 $I(X;Y)$ 是信道传递概率 $p(y \mid x)$ 的下凸函数。

3.2.5 熵、信道疑义度及平均互信息的相互关系

同第二节课。

- $H(X,Y) \le H(X) + H(Y)$
- $H(X,Y) = H(X) + H(Y \mid X) = H(Y) + H(X \mid Y)$
- $I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y)$
- $I(X;Y) = I(Y;X) \ge 0$
- $I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(XY)$
- $I(X;X) = H(X)$

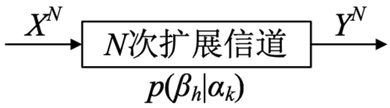
3.3 离散无记忆扩展信道

3.3.1 N 次扩展信道

N 次扩展信道与单符号信道之间的关系，类似于 N 次扩展信源与单符号信源之间的关系。

N 次扩展信道中，输入变量和输出变量均为 N 维：$\mathbf{X} = \{X_1, \ldots, X_N\}$，$\mathbf{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_N\}$，输入序列共有 r^N 个，输出序列共有 s^N 个，输入和输出序列分别记为 α_k 和□β_h.

其数学模型为：



其中

$$p(\beta_h \mid \alpha_k) = p(b_{h_1} \cdots b_{h_N} \mid a_{k_1} \cdots a_{k_N}) = \prod_{i=1}^{N} p(b_{h_i} \mid a_{k_i})$$

3.3.2 定理

Def：N 次扩展信道的平均互信息为：

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = I(X^N;Y^N) = \sum p(\alpha_k \beta_h) \log \frac{p(\alpha_k \mid \beta_h)}{p(\alpha_k)}$$

Thm：设信道的输入、输出分别是长度为 N 的序列 X, Y，则：

- 若信道无记忆

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \leq \sum_{n=1}^{N} I(X_n;Y_n)$$

- 若信源无记忆

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \geq \sum_{n=1}^{N} I(X_n;Y_n)$$

- 若信源、信道都无记忆

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = \sum_{n=1}^{N} I(X_n;Y_n)$$

3.4 信道容量

3.4.1 信道容量

Def：信道容量定义为改变信源分布 $p(x)$，所得到的平均互信息的最大值：

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y)$$

因为 $I(X;Y)$ 是信源分布 $p(x)$ 的上凸函数，所以这个最大值能找到且唯一。

信道容量与信源 $p(x)$ 无关，只与信道特性 $p(x \mid y)$ 有关，因为取了最大值。

Def（信息传输率）：平均每个输出符号携带的关于输入的信息量（比特/符号）。

$$R = I(X;Y)$$

核心问题：求信道容量 C，以及达到 C 的信源分布 $p(x)$.

3.4.2 特殊信道的信道容量

- **无损信道**

  确定了输出，就能确定输入，因此信道矩阵的每一列只有一个非零元素。

  信道疑义度：$H(X \mid Y) = 0$

  于是：$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y) = H(X)$

  信道容量：

  $$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} H(X) = \log r$$

  最佳输入分布为等概分布。

- **确定信道**

  确定了输入，就能确定输出，因此信道矩阵的每一行只有一个非零元素。又因为每一行的和为 1，因此每一行有且仅有一个 1，其余都是 0.

  $H(Y \mid X) = 0$

  于是：$I(X;Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = H(Y)$

  信道容量：

  $$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} H(Y) = \log s$$

  最佳输入分布为使得输出是等概分布的分布。

- **无噪信道**

  输出与输入一一对应，信道矩阵是单位矩阵。

$H(X \mid Y) = H(Y \mid X) = 0$

于是：$I(X;Y) = H(X) = H(Y)$

信道容量：

$$C = \log r = \log s$$

最佳输入分布为等概分布。

3.4.3 离散对称信道

Def（输入对称信道）：信道矩阵的每一行都是其他行的不同排列。

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

于是 $H(Y \mid X = x_1) = \cdots = H(Y \mid X = x_r)$，故

$$H(Y \mid X) = \mathbb{E}_X[H(Y \mid X)] = H(Y \mid X = x_k) = H(p_1', \ldots, p_s')$$

其中，$p_1', \ldots p_s'$□为信道矩阵中的任一行。因此 $I(X;Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = H(Y) - H(p_1', \ldots, p_s')$.

信道容量：

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} (H(Y) - H(p_1', \ldots, p_s')) = \log s - H(p_1', \ldots, p_s')$$

最佳输入分布为使得输出是等概分布的分布。

Def（输出对称信道）：信道矩阵的每一列都是其他列的不同排列，易知每一列和为 r/s.

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

当输入等概率分布时，输出也是等概率分布：

$$p(y_j) = \sum_{k=1}^{r} p(y_j \mid x_k) p(x_k) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r} p(y_j \mid x_k) = \frac{1}{r} \frac{r}{s} = \frac{1}{s}$$

Def（对称信道）：信道矩阵的每一行（列）都是其他行（列）的不同排列。

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Def（准对称信道）：若一个离散无记忆信道的信道矩阵中，按照信道的输出集 Y 可以将信道矩阵划分成 n 个子集，每个子矩阵中的每一行（列）都是其他行（列）的不同排列，则称这类信道为准对称信道。当划分的子集只有一个时，信道关于输入和输出对称，称此类信道为对称信道。

Thm：一个离散对称信道当输入为等概分布时，达到信道容量 C，且

$$C = \log s - H(p'_1 \cdots p'_s)$$

其中，$p'_1, \ldots p'_s$□为信道矩阵中的任一行。

Proof：利用输入、输出对称信道的性质易证。

Def（强对称信道）：

$$P = \begin{bmatrix} \bar{p} & \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \frac{p}{r-1} \\ \frac{p}{r-1} & \bar{p} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \frac{p}{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \bar{p} \end{bmatrix}, \text{式中 } p + \bar{p} = 1$$

信道容量：

$$C = \log r - p\log(r-1) - H(p)$$

最佳输入分布为等概率分布。

3.4.4 离散无记忆 N 次扩展信道的信道容量

$$C^N = \max I(\mathbf{X};\mathbf{Y})$$

1. 由于信道无记忆时 $I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \leq \sum_{i=1}^N I(X_n;Y_n)$，同时如果信源也无记忆，$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^N I(X_n;Y_n)$，因此 C^N 的最大值在信源无记忆时取到。
2. 当信源无记忆时，$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = NI(X;Y)$，因此
$$C^N = \max NI(X;Y) = NC$$
3. 当信源无记忆且达到最佳分布时，DMC 的 N 次扩展信道达到信道容量。

3.4.5 信源与信道的匹配

通常情况下，信息传输率 $R = I(X;Y) < C$，信道有剩余度：$C - I(X;Y)$

信道的相对剩余度：

$$\frac{C - I(X;Y)}{C} = 1 - \frac{I(X;Y)}{C}$$

信源与信道匹配：信源处于最佳输入分布，使得信息传输率 $R = C$.

信源编码的目的：通过编码，改变原始信源的统计特性，使得信源与信道尽量匹配，使得信道剩余度尽可能小。

4 无失真信源编码

编码：把信息由一种表示形式变换成另外一种表示形式。

4.1 编码器

设信源符号集为 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_q\}$，码符号集为 $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$. 编码器将信源符号 s_i 编码为其对应码字 W_i:

$$\text{信源符号 } s_i \xrightarrow{\text{encoder}} \text{码字 } W_i = (x_{i1}x_{i2}\cdots x_{il})$$
$$\text{源字 } S_i = (s_{i_1}\ldots s_{i_N}) \xrightarrow{\text{encoder}} \text{码 } C = (W_1\ldots W_N)$$

所有码字构成的集合称为代码组 $\mathbf{C} = \{W_1, W_2, \ldots, W_q\}$.

例如：

信源符号	码1	码2	码3	码4	码5
s_1	00	0	0	1	1
s_2	01	10	11	01	10
s_3	10	00	00	001	100
s_4	11	01	11	0001	1000

对于无失真编码，映射应为一一映射，且可逆。

N 次扩展码：设信源符号集 $S = \{s_i\}$ 编码后得到代码组 $\mathbf{C} = \{W_i\}$，则对 N 次扩展信源 S^N 进行编码，得到代码组 $\mathbf{C}^N$，且 $\alpha = (s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jN}) \in S^N$ 编码为 $W = (W_{j1}, W_{j2}, \ldots, W_{jN}) \in \mathbf{C}^N$. 例如：

信源符号	A	B	C	D
码字	0	01	001	111

二次扩展码

信源符号	AA	AB	AC	AD	BA	...	DD
码字	00	001	0001	0111	010	...	111111

4.2 分组码

Def（分组码）：将信源符号集中的每个信源符号 s_i 映射成一个固定的码字 w_i，这样的码称为分组码。

Def（非分组码）：编码器的输出不仅与当前输入的源字母决定，还可能与以前的源字母或码字母有关，例如：$y_i = x_i \oplus y_{i-1}$.

Def（奇异性）：若一种分组码中的所有码字都互不相同，则称为非奇异码（non-singular），否则称为奇异码。

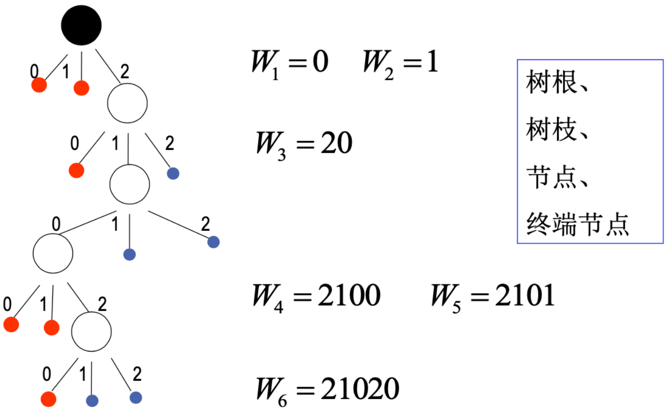
非奇异是分组码能够正确译码的必要条件：即正确译码 $\Rightarrow$ 非奇异码，但是非奇异码 $\not\Rightarrow$ 正确译码，因为即便单个符号是非奇异的，其 N 次扩展码可能是奇异的，导致不能正确译码。

Def（唯一可译性）：一个分组码若对于任意有限的整数 N，其 N 次扩展码均为非奇异的，则称之为唯一可译码（uniquely decodable code）.

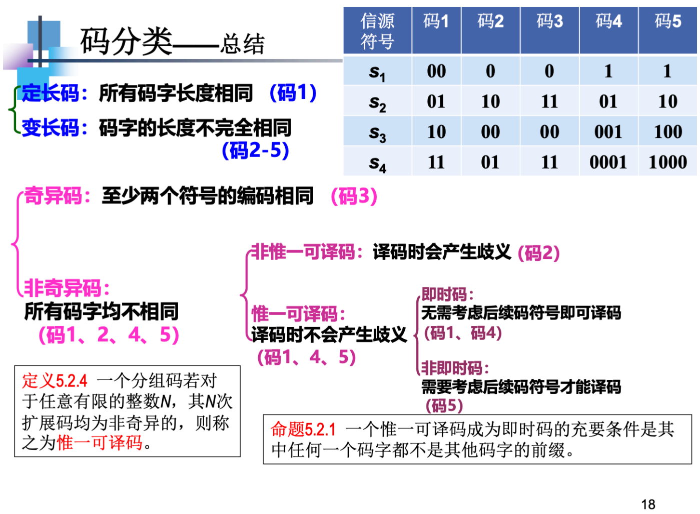
Def（即时性）：无需考虑后续的码符号即可从码符号序列中译出码字，这样的唯一可译码称为即时码（instantaneous code 瞬时码、非延长码）。

Thm：一个唯一可译码成为即时码的充要条件是其中任何一个码字都不是其他码字的前缀。

树图法构造即时码：



小结：



信源符号	码1	码2	码3	码4	码5
s_1	00	0	0	1	1
s_2	01	10	11	01	10
s_3	10	00	00	001	100
s_4	11	01	11	0001	1000

4.3 定长码

4.3.1 两个不等式

Thm：

- 若信源有 q 个符号，对其进行 r 元等长编码，码长为 l，则信源存在唯一可译定长码的条件：$r^l \ge q$，即

$$l \ge \log_r q \quad 或 \quad l \log r \ge \log q$$

- 若对该信源的 N 次扩展信源进行 r 元等长编码，码长为 l，则信源存在唯一可译定长码的条件：$r^l \ge q^N$，即

$$\frac{l}{N} \ge \log_r q \quad 或 \quad l \log r \ge N \log q$$

理解：$l\log r$ 是编码后的最大信息量，$N\log q$ 是编码前的最大信息量，要使得唯一可译码存在，那么编码后能表示的最大信息量至少要有编码前的最大信息量。

4.3.2 定长编码定理

Thm（定长编码定理）：设离散无记忆信源 $\begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & \cdots & s_q \\ p(s_1) & \cdots & p(s_q) \end{bmatrix}$ 的熵为 $H(S)$，其 N 次扩展信源为 $\begin{bmatrix} S^N \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_{q^N} \\ p(\alpha_1) & \cdots & p(\alpha_{q^N}) \end{bmatrix}$，现用码符号集 $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ 对 N 次扩展信源进行长度为 l 的定长编码。对于 $\forall \epsilon > 0$，

- 若满足：

$$\frac{l}{N}\log r \geq H(S) + \epsilon$$

  则 $\forall \delta > 0$，当 N 足够大时，译码错误概率小于 δ；

- 若满足：

$$\frac{l}{N}\log r \leq H(S) - 2\epsilon$$

  则当 N 足够大时，译码错误概率趋于 1.

理解：$l\log r$ 与 $NH(S)$ 的比较——前者是长度为 l 的码能携带的最大信息量，后者是长度为 N 的信源符号序列平均携带的信息量。

Intuitive proof idea：高概率的序列数量少（典型序列）、数量多的序列概率低（非典型序列）。

Def（编码信息率/编码速率/码率）：

$$R = \frac{l}{N}\log r$$

含义：用于表示每个信源符号的最大信息量。

Def（编码效率）：

$$\eta = \frac{H(S)}{R} = \frac{H(S)}{l/N \cdot \log r}$$

最佳编码效率：

$$\eta_{\max} = \frac{H(S)}{H(S) + \epsilon}, \epsilon > 0$$

推论：对任意 $\delta > 0$，当

$$N \geq \frac{\sigma^2}{H^2(S)} \frac{\eta_{\max}^2}{(1 - \eta_{\max})^2 \delta}$$

时，错误率可以小于 δ. 其中 σ^2 是 $I(s_i)$ 的方差。

4.4 变长码

4.4.1 两个不等式

Kraft inequality：即时码***存在***的充要条件是：

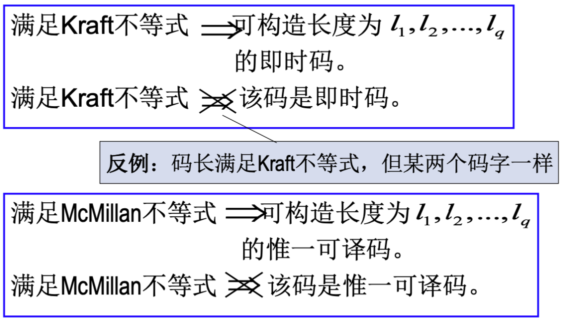
$$\sum_{i=1}^{q} r^{-l_i} \leq 1$$

McMillan inequality：唯一可译码***存在***的充要条件是：

$$\sum_{i=1}^{q} r^{-l_i} \leq 1$$

其中 q 是信源符号的个数，r 是码符号的个数，$l_1, \ldots, l_q$ 是各个码字的码长。

> 没错，这两个不等式一模一样。
>
> 注意：



4.4.2 唯一可译码判别准则

由原始码集合 S_0，构造 $S_1, S_2, \ldots$ 如下：

1. S_1 的构造：设 $W_i, W_j \in S_0$，若 $W_i = W_j A$，则将后缀 A 加入 S_1；
2. $S_n (n > 1)$ 的构造：将 S_0 与 S_{n-1} 比较，若 $W \in S_0, U \in S_{n-1}$ 且 $U = WA$

一种码是唯一可译码的充要条件是 $S_1, S_2, \ldots$ 均与 S_0 交集为空。

例子：

S_0	S_1	S_2	S_3
0		00	0
10	11	10	11
1100		01	1
1110			
1011			
1101			

4.4.3 变长编码定理

Def（平均长度）：设信源 $\begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & \cdots & s_q \\ p(s_1) & \cdots & p(s_q) \end{bmatrix}$ 编码后的码字分别为 $W_1, \ldots, W_q$，各码字长度分别为 $l_1, \ldots, l_q$. 对唯一可译码，这个码的平均长度为:

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{q} p(s_i) l_i$$

Def（紧致码/最佳码）：若一种唯一可译码的平均码长小于等于其他的唯一可译码，则称为紧致码/最佳码。

Thm（变长编码定理）：对熵为 $H(S)$ 的离散无记忆信源 $\begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & \cdots & s_q \\ p(s_1) & \cdots & p(s_q) \end{bmatrix}$，

- 若用具有 r 个码符号的集合 $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ 对该信源进行编码，则一定存在一种唯一可译码，其平均码长 $\bar{L}$ 满足:

$$\frac{H(S)}{\log r} \le \bar{L} < 1 + \frac{H(S)}{\log r}$$

- 若用具有 r 个码符号的集合 $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ 对该信源的 N 次扩展信源 S^N 进行编码，则一定存在一种唯一可译码，其每个信源符号所需的码字平均长度满足:

$$\frac{H(S)}{\log r} \le \frac{\bar{L}_N}{N} < \frac{H(S)}{\log r} + \frac{1}{N}$$

可记 $H(S)/\log r$ 为 $H_r(S)$.

Def（编码信息率/编码速率/码率）：

$$R = \frac{\bar{L}_N}{N} \log r$$

Def（编码效率）：

$$\eta = \frac{H(S)}{R} = \frac{H(S)}{\bar{L}_N/N \cdot \log r} = \frac{H_r(S)}{\bar{L}}$$

从信道的角度看，对于无噪信道，编码后的信息传输率为:

$$R = H(X) = \frac{H(S)}{\bar{L}} \quad (\text{bit}/\text{码符号})$$

4.4.4 Shannon 编码

设信源的概率分布为 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$，且 $p_1 > p_2 > \cdots > p_n$，

1. 求 $q_k = \sum_{i=1}^{k-1} p_i$
2. 将 q_k 按二进制小数展开
3. 令 $l_k = \left\lceil \log \frac{1}{p_k} \right\rceil$，截取 l_k 位作为 p_k 的编码

4.4.5 Huffman 编码

二元 Huffman 码：每次把概率最小的 2 个符号合并成一个新的符号。

当有多个符号概率相同时，他们的排列次序是任意的。但是无论最终的编码结果如何，针对同一个信源，平均码长一定是相等的。这时，码长的方差越小，我们认为越好。

r 元 Huffman 码：每次把概率最小的 r 个符号合并成一个新的符号，并分别用码元 $0, 1, \ldots, (r-1)$ 来表示。为了使短码得到充分利用，使平均码长最短，**必须使最后一步的缩减信源有 r 个信源符号**。因此对于 r 元编码，信源 S 符号个数 q 必须满足（每合并一次减少 $r-1$ 个）：

$$q = (r-1)k + r$$

即要求方程 $q = (r-1)k + r$ 有整数解，其中 k 为未知数。**如果此方程没有解，可以通过人为增加一些概率为 0 的符号来解决。**

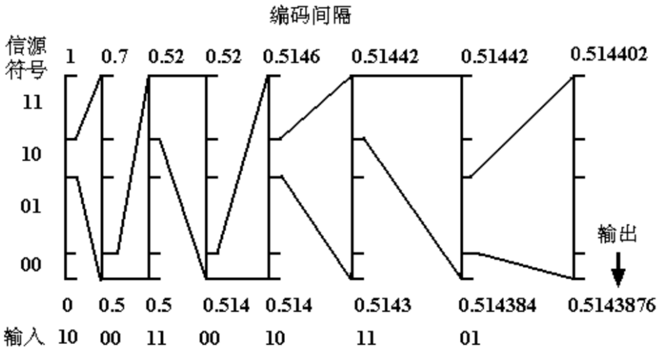
4.4.6 算术编码

初始化：

符号	00	01	10	11
概率	0.1	0.4	0.2	0.3
初始编码间隔	[0, 0.1)	[0.1, 0.5)	[0.5, 0.7)	[0.7, 1]

确定符号的编码范围：

- 编码时输入第 1 个符号是 10，找到它的编码范围是 $[0.5, 0.7]$
- 消息中第 2 个符号 00 的编码范围是 $[0, 0.1)$，它的间隔就取 $[0.5, 0.7)$ 的第一个十分之一作为新间隔$[0.5, 0.52)$
- 编码第 3 个符号 11 时，取新间隔为 $[0.514, 0.52)$
- 编码第 4 个符号 00 时，取新间隔为 $[0.514, 0.5146)$
- 依此类推......
- 消息的编码输出可以是最后一个间隔中的任意数



解码:

步骤	间隔	译码符号	译码判决
1	[0.5, 0.7]	10	0.51439 在间隔 [0.5, 0.7)
2	[0.5, 0.52]	00	0.51439 在间隔 [0.5, 0.7)的第 1 个 1/10
3	[0.514, 0.52]	11	0.51439 在间隔[0.5, 0.52)的第 7 个 1/10
4	[0.514, 0.5146]	00	0.51439 在间隔[0.514, 0.52)的第 1 个 1/10
5	[0.5143, 0.51442]	10	0.51439 在间隔[0.514, 0.5146)的第 5 个 1/10
6	[0.514384, 0.51442]	11	0.51439 在间隔[0.5143, 0.51442)的第 7 个 1/10
7	[0.51439, 0.5143948]	01	0.51439 在间隔[0.51439, 0.5143948]的第 1 个 1/10
7	译码的消息：10 00 11 00 10 11 01		

缺点:

- 用区间中的一个数表示一个编码序列的输出，如果序列无限长，则这个小数也会无限长，有可能溢出机器 的表示能力
- 不到最后，不能输出这个区间，因此也无法输出任何编码的结果，但大部分情况都要求输入序列后就能获 得输出，例如，实时的应用场景，你不能等所有的序列输入完后才给出输出的结果
- 需要事先知道符号的概率分布

定长码和变长码的小结:

	定长码	变长码
唯一可译码存在条件	$r^l \geq q$ 或 $l \log r \geq \log q$	$\sum_{i=1}^{q} r^{-l_i} \leq 1$
N 次扩展信源 唯一可译码存在条件	$r^l \geq q^N$ 或 $l \log r \geq N \log q$	/
编码信息率	$R = l/N \cdot \log r$	$R = \bar{L}_N/N \cdot \log r$
编码效率	$\eta = H(S)/R$	$\eta = H(S)/R$

5 有噪信道编码

5.1 噪声信道的编码问题

图 5.1 编码信道

在普通信道的输入和输出端连接编码器和译码器，形成的新信道称作编码信道。

5.1.1 概述

为什么需要信道编码？错误检测和校正：

- 奇偶校验：错误检测
- 汉明码（Hamming code）：错误检测和校正

对比：

- **信源**编码的作用：提高信息传输的有效性。
- **信道**编码的作用：提高信息传输时的抗干扰能力，以增加信息传输的可靠性。

分类：

- 按照功能：
  - 检错码（Error Checking Code）
  - 纠错码（Error Correcting Code）
- 按照对信息序列处理的方法；
  - 分组码（Block Code）：将信道编码器的源符号序列与码符号序列都分成组，映射在分组的基础上独立进行的。
  - 非分组码（Non-block Code）：编码器的输出不仅与当前输入的源符号有关，还可能与与以前的源符号或码符号有关，又称为卷积码。
- 按照校验位与信息位关系：
  - 线性码（Linear Code）：校验位与信息位之间的关系是线性关系（满足线性叠加原理）。
  - 非线性码（Nonlinear Code）：不满足上述关系。
- 按照适用的差错类型：
  - 纠随机差错码：设计的目标是纠随机差错。

– 纠突发差错码：设计的目标是纠突发错误。

5.1.2 译码规则

Def：设信道输入符号集为 $X=\{x_i, i=1,\ldots,r\}$，输出符号集为 $Y=\{y_j, j=1,\ldots,s\}$，如果对于每一个符号，都有一个确定的函数 F，使 y_j 对应于唯一的一个输入符号 x_i，称这样的函数为**译码规则**，记为

$$F(y_j)=x_i$$

因为每个 y_j 都有 r 种译码选择，所以译码规则一共有 r^s 种。给定一个译码规则 $F(y_j)=x_i$，<u>假若我们承认它是“正确”的</u>，那么可以定义：

- **条件正确概率**

$$p(F(y_j)\mid y_j)=p(x_i\mid y_j)$$

- **条件错误概率**

$$p(e\mid y_j)=1-p(x_i\mid y_j)$$

- **平均错误概率**

$$p_E=\sum_{j=1}^{s}p(y_j)p(e\mid y_j)=\sum_{j=1}^{s}p(y_j)(1-p(x_i\mid y_j))$$

那么究竟哪个译码规则最好呢，我们认为**使得平均错误概率最小**的译码规则是最好的。基于这一原理，有如下译码准则：

- **最大后验概率准则**：选择译码函数 $F(y_j)=x^*$，使得：

$$p(x^*\mid y_j)\geq p(x_i\mid y_j)\quad \forall i$$

- **极大似然译码准则**：选择译码函数 $F(y_j)=x^*$，使得：

$$p(y_j\mid x^*)\geq p(y_j\mid x_i)\quad \forall i$$

当输入等概率分布时，两个准则是等价的。

在确定选择某个译码准则 $F(y_j)=x^*$ 后，平均错误概率可以进一步写作：

$$\begin{aligned}
p_E&=\sum_{y_j}p(y_j)p(e\mid y_j)\\
&=\sum_{y_j}p(y_j)(1-p(x^*\mid y_j))\\
&=1-\sum_{y_j}p(x^*y_j)\\
&=\sum_{y_j}\sum_{x_i\neq x^*}p(x_iy_j)\\
&=\sum_{y_j}\sum_{x_i\neq x^*}p(x_i)p(y_j\mid x_i)
\end{aligned}$$

特别地，若输入等概率分布，则：

$$p_E=\frac{1}{r}\sum_{y_j}\sum_{x_i\neq x^*}p(y_j\mid x_i)$$

Fano 不等式：错误概率与信道疑义度 $H(X \mid Y)$ 满足如下关系：

$$H(X \mid Y) \leq H(p_E) + p_E \log(r-1)$$

含义：当信源、信道给定，信道疑义度 $H(X \mid Y)$ 给定了译码错误概率的下界。

5.2 错误概率与编码方法

即使选择最佳译码规则也只能有限地减小平均错误概率 p_E（因为说到底，p_E 还是由信道矩阵决定的），信道编码方法可以进一步减小 p_E ，甚至是任意小。

5.2.1 重复编码

发送端发 0/1 时，连续发多个 0/1.

例子：三次重复编码：

$$P = \begin{array}{c} \\ 000 \\ 111 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bar{p}^3 & \bar{p}^2 p & \bar{p}^2 p & \bar{p} p^2 & \bar{p}^2 p & \bar{p} p^2 & \bar{p} p^2 & p^3 \\ p^3 & \bar{p} p^2 & \bar{p} p^2 & \bar{p}^2 p & \bar{p} p^2 & \bar{p}^2 p & \bar{p}^2 p & \bar{p}^3 \end{bmatrix} \end{array},$$

重复次数越多，错误概率越小，但信息传输率也下降：

$$R = \frac{H(S)}{\bar{L}} = \frac{\log M}{n}$$

5.2.2 消息符号数 M

在一个二进制信道的 n 次无记忆扩展信道中，输入端有 2^n 个符号序列可能作为消息，通常只选择其中的 M 个作为消息传递。

例子：设 $n=3$，

M	p_E	R(bit/符号)	编码方法
2	3×10^{-4}	1/3	$\alpha_1=000, \alpha_8=111$
4	$\approx 2\times10^{-2}$	2/3	$\alpha_1=000, \alpha_4=011, \alpha_6=101, \alpha_7=110$
	$\approx 2\times10^{-2}$	2/3	$\alpha_1=000, \alpha_4=011, \alpha_5=100, \alpha_7=110$
	$\approx 2.28\times10^{-2}$	2/3	$\alpha_1=000, \alpha_2=011, \alpha_3=010, \alpha_5=100$
8	3×10^{-2}	1	$\alpha_1=000, \cdots\cdots \alpha_8=111$

可以得出结论：随着 M 增大，R 增大，但 p_E 也随之增大；反之亦然。

5.2.3 (5,2)线性码

取 $M=4, n=5$，即在 5 次扩展信道中，有 32 种可能的输入序列，选择其中的 4 个作为消息传递。具体而言，这 4 个码字满足下列条件：设码字为 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$，则：

$$\begin{cases}\alpha_1=\alpha_4\\ \alpha_3=\alpha_5=\alpha_1\oplus\alpha_2\end{cases}$$

其信息传输率为 $R=\log M/n=2/5$.

5.2.4 Hamming 距离

Def：设 $X=(x_1\ldots x_n), Y=(y_1\ldots,y_n)$ 为两个长为 n 的二元码字，则码字 X 与 Y 之间的 Hamming 距离定义为：

$$D(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\oplus y_i$$

Hamming 距离满足距离的三个性质：非负、对称、三角不等式。

给定码的集合 $\mathbf{C}$，定义其最小距离为其中任意两个码字的 Hamming 距离的最小值：

$$D=\min D(C_i,C_j)\quad C_i\neq C_j, C_i,C_j\in\mathbf{C}$$

在选择编码规则时，应使码字之间的距离越大越好。

5.3 有噪信道编码定理

有噪信道编码定理：设 C 为离散无记忆信道容量，$\forall\varepsilon>0$，当信息传输率 $R<C$ 时，只要码长 N 足够长，总可以在输入符号集中找到 $M=2^{NR}$ 个码字组成的一组码和相应的译码规则，使译码的错误率 $p_E<\varepsilon$.

Intuitive idea：$R<C \implies 2^{NR}<2^{NC} \implies 2^{N(\log M/N)}<2^{NC} \implies M<2^{NC}$.

有噪信道编码逆定理：设有一离散无记忆平稳信源，其信道容量为 C，对于任意 $\varepsilon>0$，若选用码字总数 $M=2^{N(C+\varepsilon)}$，则无论 N 取多大，也找不到一种编码，使译码错误概率 p_E 任意的小。

6 限失真信源编码

6.1 失真测度

Def：设 $A=\{a_1,\ldots,a_r\}$ 和 $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_s\}$ 分别为源符号集和码符号集，单个符号的**失真函数/失真度量/失真度**是一个非负函数 $d(x,y)$，其中 $x\in A,y\in B$.

常见失真函数：

- 汉明失真

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{if } x=y\\ 1 & \text{if } x\neq y\end{cases}$$

- 平方误差失真

$$d(x,y)=(y-x)^2$$

失真矩阵：

$$[d]=\begin{bmatrix}d(a_1,b_1) & \cdots & d(a_1,b_s)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ d(a_r,b_1) & \cdots & d(a_r,b_s)\end{bmatrix}$$

矢量失真函数/字失真度：

设 $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_N)$ 和 $\vec{y}=(y_1,\ldots,y_N)$ 分别为长度为 N 的源字和码字，$\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 之间的矢量失真函数为：

$$d(\vec{x},\vec{y})=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}d(x_i,y_i)$$

平均失真度：

$$\bar{D}=\mathbb{E}[d]=\sum_i\sum_j p(x_iy_j)d(x_i,y_j)=\sum_i\sum_j p(x_i)p(y_j\mid x_i)d(x_i,y_j)$$

矢量平均失真度：

$$\bar{D}_N=\mathbb{E}[d_N]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}[d(x_i,y_j)]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\bar{D}_i$$

6.2 信息率失真函数

6.2.1 D允许信道

保真度准则：如果预先规定的平均失真度为 D，则称信源压缩后的平均失真度 $\bar{D}$ 不大于 D 的准则为保真度准则。

> 保真度准则对应「限失真信源编码」中的「限」。

$$\bar{D} = \sum_i \sum_j p(x_i)p(y_j \mid x_i)d_{ij} \le D$$

D允许信道：满足保真度准则 $\bar{D} \le D$ 的所有信道称为 D 允许信道，记为 B_D，即 $B_D = \{p(y \mid x) : \bar{D} < D\}$.

理解：把编码过程看成一个信道，那么：

- 限失真信源压缩问题就是，对给定的信源，在满足保真度准则的前提下，使得信息传输率 R（每个符号携带的关于信源的信息量）尽可能小。

- 从接收端的角度，在满足保真度的条件下，希望 $I(X;Y)$ 最小。

- 如果在 D 允许失真信道中，找到 $p(y \mid x)$，使得 $I(X;Y)$ 达到最小，就说明找到了最好的编解码方法。

6.2.2 信息率失真函数

Def：当信源 $p(x)$ 一定时，平均互信息量 $I(X;Y)$ 是信道转移概率函数 $p(y \mid x)$ 的 U 型凸函数，这意味着可以关于 $p(y \mid x)$ 对平均互信息量 $I(X;Y)$ 求得极小值，定义这个极小值为信息率失真函数 $R(D)$：

$$R(D) = \min_{p(y|x) \in B_D} I(X;Y)$$

对于离散无记忆信源：

$$R(D) = \min_{p(y_j|x_i) \in B_D} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} p(x_i)p(y_j \mid x_i) \log \frac{p(y_j \mid x_i)}{p(x_i)}$$

$R(0)$ 表示无失真信源的信息传输率。

对比：信息率失真函数 v.s. 信道容量

信道容量：　$C = \max\{I(P,Q)\}$

信息率失真函数：　$R(D) = \min\{I(P,Q)\}$

信道容量	率失真函数
信道固定,信源分布可变	信源固定，失真度量固定，信道可变
选择信源，使得平均互信息最大	选择试验信道，使得平均互信息最小
研究信道容量是为了充分利用特定信道，使传输的信息量最大而错误概率任意小	为了在一定的失真条件下，尽可能用最少的码符号来传送信源消息
信道编码定理：$R < C$	限失真信源编码定理：$R > R(D)$

6.2.3 率失真函数的性质

Property 1：$R(D)$ 的定义域为 $0 \le D_{\min} \le D \le D_{\max}$，当 $D > D_{\max}$ 时 $R(D) = 0$；值域为 $0 \sim H(X)$.

1. 一般而言，$p(x_i)$ 和 $d(x,y)$ 是已知条件，因此：

$$D_{\min} = \sum_i \left[p(x_i) \min_{p(y_j|x_i)} \sum_j p(y_j \mid x_i) d(x_i, y_j) \right]$$

即：对每个 x_i，设 $y^* = \arg\min_{y_j} d(x_i, y_j)$，那么取 $p(y^* \mid x_i) = 1$ 而其他为 0，即达到平均失真度的最小值。**简单来说，就是在失真矩阵中圈出每一行的最小值，从而得到对应信道。**

2. 当 $D > D_{\max}$ 时，$R(D) = 0$，即存在一个信道使得 $I(X;Y) = 0$，即 X, Y 独立。于是：

$$\begin{aligned} D_{\max} &= \min_{p(y|x)} \sum_i \sum_j p(x_i) p(y_j \mid x_i) d(x_i, y_j) \\ &= \min_{p(y)} \sum_i \sum_j p(x_i) p(y_j) d(x_i, y_j) \\ &= \min_{p(y)} \sum_j p(y_j) \sum_i p(x_i) d(x_i, y_j) \end{aligned}$$

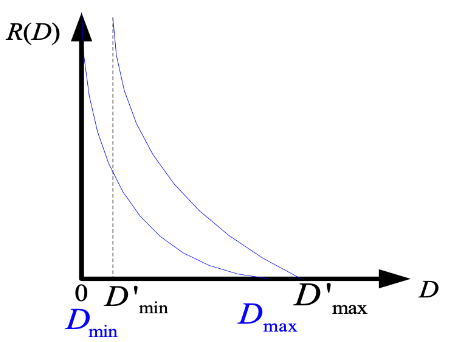
取 $p(y_j \mid x_i) = p(y_j) = \begin{cases} 1 & \sum_i p(x_i) d(x_i, y_j) \text{取最小值} \\ 0 & \sum_i p(x_i) d(x_i, y_j) \text{不取最小值} \end{cases}$，则：

$$D_{\max} = \min_{p(y)} \sum_i p(x_i) d(x_i, y_j)$$

简单来说，就是在失真矩阵中选出一列，这一列的加权和最小，从而得到对应信道。（当然，如果某多列加权和一样，那么取这些列做线性组合也行）

Property 2：$R(D)$ 是关于 D 的下凸函数

Property 3：$R(D)$ 在 $(0, D_{\max})$ 上严格单调递减



6.3 限失真信源编码定理

限失真信源编码定理：设离散 n 长无记忆信源为 $\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix}$，单字符失真函数为 $d(x_{ik}, y_{jk})$，给定单字符失真度下的信息率失真函数为 $R(D)$，则对于任意的 $\varepsilon > 0, \delta > 0, D \ge 0$，可以找到满足保真度准则 $(D + \delta)$ 的允许码 (M, n)，当 n 足够大时，其信息传输率 $R = R(D) + \varepsilon$，码字数目 $M = 2^{n[R(D)+\varepsilon]}$.

限失真信源编码逆定理：设离散 n 长无记忆信源为 $\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix}$，单字符失真函数为 $d(x_{ik}, y_{jk})$，给定单字符失真度下的信息率失真函数为 $R(D)$，则所有满足保真度准则 D 的信源码的速率都不小于 $R(D)$，即

$$\frac{\log M(n,D)}{n} \geq R(D)$$

理解：

1. 不存在平均失真度为 D，平均信息传输率 $R < R(D)$ 的任何信源码。
2. 任意长度为 n 的信源码 C，若码字个数 $M < 2^{nR(D)}$，一定有平均失真度 $d(C) > D$.

两大问题：

1. 符合实际信源的$R(D)$函数的计算相当困难。
2. 该定理说明在一定条件下满足保真度准则的编码方法是存在的，但并未给出编码方案。

7 保密系统的基本信息理论

7.1 基本概念

古典密码举例:

- 凯撒密码

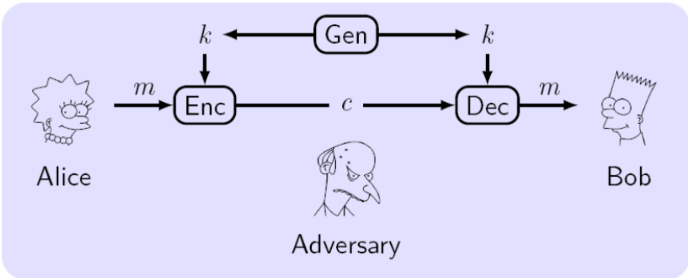
$$c = [(m_i + k) \bmod 26]$$

- 单字母替换
- Vigenere 多字母移位加密

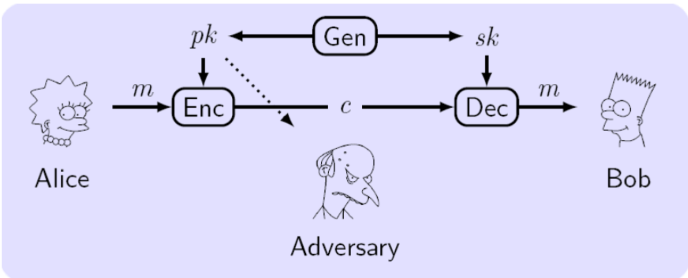
$$c_i = m_i + k_{i \bmod t}$$

- Enigma 密码（二战）

对称加密（双方使用同一个密钥）：

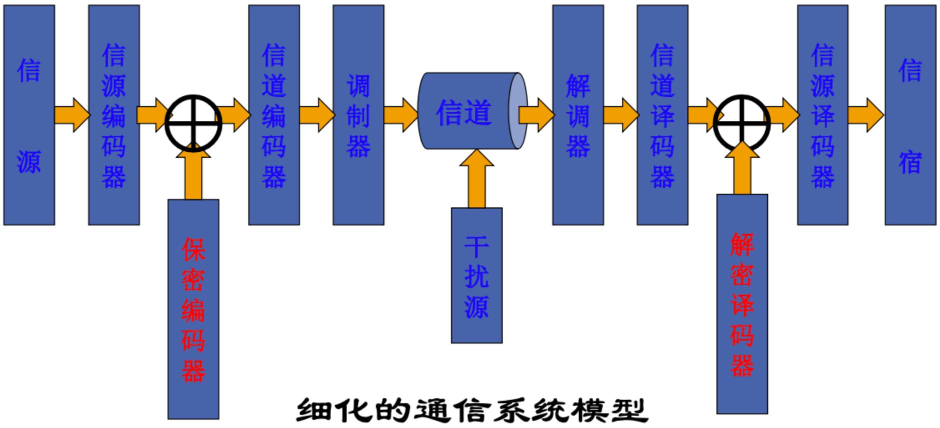


非对称加密（公钥加密、私钥解密）：



Kerckhoff principle：保密性不应依赖于算法或系统本身的保密性，而依赖于密钥的保密性。

7.2 保密系统的数学模型



细化的通信系统模型

说明：**假设信道是无干扰的**。对于有干扰信道，可根据香农第二定理，在信道输入输出端分别加入信道编解码，构成广义的无干扰信道。

两种安全性标准：

- 理论保密性：密码分析者在具有无限的时间和计算资源条件下，密码系统的抗破译能力。
- 实际保密性：密码分析者在一定的计算资源及其他限制的条件下，密码系统的抗破译能力。

几类密码分析：

- 唯密文攻击(ciphertext only attack, COA)：仅能对截获的密文进行分析；
- 已知明文攻击(known plaintext attack, KPA)：除密文外，还知道一 些密文-明文对(使用相同密钥)；
- 选择明文攻击(chosen plaintext attack, CPA)：可以选择一些明文-密文对；
- 选择密文攻击(chosen ciphertext attack, CCA)：可以选择一些密文-明文对；

攻击场景分类：

- COA，KPA：被动攻击(Passive attack)
- CPA，CCA：主动攻击(Active attack)

7.3 完全保密性

记 S^L 为明文空间，C^n 为密文空间，K^r 为密钥空间。

Def（完全保密系统）：如果保密系统 $(S^L, K^r, C^n, E_k, D_k)$ 满足 $I(S^L; C^n) = 0$，称此系统为完全保密系统。

对于任一保密系统：

- 从密文中获取的关于明文的信息有：$I(S^L; C^n) = H(S^L) - H(S^L \mid C^n)$
- 从密文中获取的关于密钥的信息有：$I(K^r; C^n) = H(K^r) - H(K^r \mid C^n)$
- 已知密文和密钥后，明文没有不确定性：$H(S^L \mid C^n K^r) = 0$ 或 $I(S^L; C^n K^r) = H(S^L)$

Def（完全保密系统的另一个等价定义）：

$$p(m \mid c)=p(m) \quad \text{或} \quad p(c \mid m)=p(c) \quad \forall m \in S^L, c \in C^n$$

Thm1：明文空间上的加密方案 Π 是完全保密的，当且仅当对于任意明文空间上的概率分布，任意 $m_0, m_1 \in S^L, c \in C^n$，都有：

$$p(c \mid m_0)=p(c \mid m_1)$$

Thm2：对任意保密系统，

$$I(S^L; C^n) \geq H(S^L)-H(K^r)$$

Thm3：完全保密系统存在的必要条件是：

$$H(K^r) \geq H(S^L)$$

> 理解：若信源有剩余，$0 \leq H(S^L) \leq L \log q$；若信源有记忆，$H(S^L)$ 大大减少。因此明文的剩余度将会为密码分析者带来一定的便利，可以通过无失真信源编码减少新信源的剩余度，来增大破译难度。

Thm4：一次一密是完全保密的。

Thm5：设加密方案 Π 是明文空间 S^L 上的一个完全保密加密方案，密钥空间 K^r 由 Gen 算法产生，则 $|K^r| \geq |S^L|$.

Thm6（香农定理）：设加密方案 $\Pi=(\text{Gen}, \text{Enc}, \text{Dec})$ 的明文空间为 $\mathcal{M}$，密钥空间为 $\mathcal{K}$，密文空间为 $\mathcal{C}$，且 $|\mathcal{M}|=|\mathcal{K}|=|\mathcal{C}|$，则当且仅当下列条件成立时，此方案是完全保密的：

1. 由 Gen 产生的任何密钥 $k \in \mathcal{K}$ 的概率都是 $\frac{1}{|\mathcal{K}|}$；
2. 对任意明文 $m \in \mathcal{M}$ 和任意密文 $c \in \mathcal{C}$，只存在唯一的密钥 $k \in \mathcal{K}$ 使得 $\text{Enc}_k(m)=c$.

7.4 理论保密性

Def（唯一解距离）：一个密码系统在唯密文攻击下的唯一解距离为：

$$n_0=\min\{n \in N: H(K^r \mid C^n) \approx 0\}, \quad N \in \mathbb{N}_+$$

> 理解：唯一解距离是破译者唯一确定加密密钥所需的最小密文量。
>
> $$\begin{aligned} H(K^r \mid C^n) &= H(K^r \mid C_1 \cdots C_n) \\ &\leq H(K^r \mid C_1 \cdots C_{n-1}) \\ &\leq \cdots \\ &\leq H(K^r \mid C_1) \\ &\leq H(K^r) \end{aligned}$$
>
> 即密文越多，密钥的疑义度越小，从而确定密钥空间 K^r.

Def（理论保密性）：若一个密码系统满足：$\lim_{n \to \infty} H(K^r \mid C^n) \neq 0$，该系统就具有理论保密性。

Thm：若加密方案 $\Pi:(S^L, K^r, C^n, \text{Enc}_k, \text{Dec}_k)$ 采用随机密码方法（密钥与明文独立），将 L 长的明文加密成 n 长的密文（$L=n$），则：

$$H(K^r \mid C^n)=H(K^r)+H(S^L)-H(C^n)$$

Def（L 长明文的剩余度）：

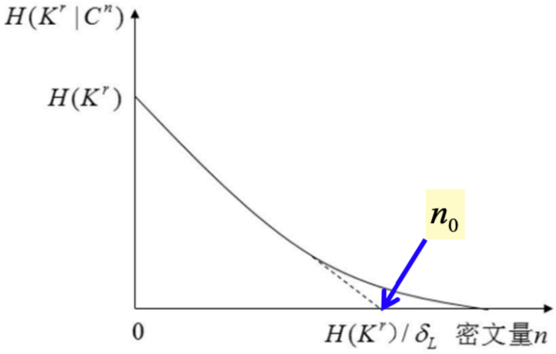
$$D_L = L\log q - H(S^L)$$

Def（L 长明文的平均剩余度）：

$$\delta_L = \frac{D_L}{L} = \log q - \frac{1}{L}H(S^L)$$

在以上定义下，由于 $H(C^n) \approx n\log q$，可推出：

$$n_0 \approx \frac{H(K^r)}{\delta_L}$$



实际情况下，通常 $\delta_L \neq 0$，因此对明文加密之前进行压缩编码来减少剩余度，对于提高系统的安全性有重要作用。

7.5 实际保密性

保密系统在破译者的能力、时间、人力等受限条件下的安全性称为实际保密性。

实际条件限制下，一个理论上不保密的系统可能提供实际保密性，<u>但也可能是脆弱的</u>。例如：英文单表代换密码在 $\delta_L = 0$ 时在理论上是安全的（唯密文攻击），但如果破译者获得一些明文-密文对，则能较容易地破译。

举例：RSA算法——安全性等价于有限域上的大素数分解难题。